САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР ®

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

+ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ И НА ПОСТРОЕНИЕ

9

К заданиям учебника Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова

ГЕОМЕТРИЯ

А. А. Белова

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ

из учебника

ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов
Л.С. Атанасяна и др.
(*М.: Просвещение*)

+ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

+ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

9 класс

Москва • «ВАКО» • 2009

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Б43

Белова А.А.

Б43 Подробный разбор заданий из учебника по геометрии: 9 класс. – М.: ВАКО, 2009. – 128 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-870-6

Предназначено для эффективного усвоения школьниками пройденного материала и приобретения прочных навыков решения задач.

Издание содержит справочный материал, алгоритмы решения типовых задач, а также подробный разбор абсолютно всех заданий из учебника по геометрии для 7–9 классов Атанасяна Л.С. и др. (М.: Просвещение), включая задачи повышенной трудности.

Автор книги – практикующий педагог.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

Учебно-методическое издание

Белова Анна Александровна

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов Л.С. Атанасяна и др. (*М.: Просвещение*)

9 класс

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»
Подписано к печати с диапозитивов 22.07.2009.
Формат 70×100/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,2. Тираж 5000 экз. Заказ № 1295.

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области
Сайт: www.chpk.ru, e-mail: marketing@chpk.ru
Факсы: 8 (496) 726-54-10; тел.: 8 (495) 788-74-65

ISBN 978-5-94665-870-6

Оглавление

Глава X.
Метод координат

§ 1 Координаты вектора

911. $\vec{m} \neq \vec{0}$. Если $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{m}$, то $\vec{n} = k\vec{m}$ при $k = -\dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{m}|}$.

Если $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{m}$, то $\vec{n} = k\vec{m}$ при $k = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{m}|}$.

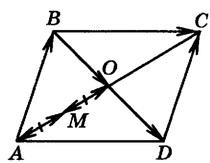
а) $k = -\dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{m}|} = -4$; **б)** $k = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{m}|} = 20$;

в) $k = -\dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{m}|} = -1$; **г)** $k = \dfrac{|\vec{n}|}{|\vec{m}|} = 5$.

912. а) $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AO}|$; $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AO} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}, k = 2$;

б) $|\overrightarrow{BO}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$; $\overrightarrow{BO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}, k = \dfrac{1}{2}$;

в) $\overrightarrow{OC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}, k = -\dfrac{1}{2}$;



г) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, k = 1$;

д) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}, k = -1$;

е) $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}, k = -\dfrac{1}{4}$;

ж) $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{AM}, k = 3$; **з)** $\overrightarrow{AC} = -\dfrac{4}{3}\overrightarrow{CM}, k = -\dfrac{4}{3}$;

и) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны. Нет такого числа k, для которого $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$;

к) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BD}$ не коллинеарны. Значит, нет такого числа k, при котором $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{BD}$.

913. Сумма коллинеарных векторов есть коллинеарный им вектор. Поэтому **а)** да; **б)** да.

914. а) Допустим, что $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Тогда

$\vec{a}+\vec{b}=k\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; $\vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}-k\vec{b}$; $\vec{a}(1-k)=\vec{b}(-1-k)$; $\vec{a}=\dfrac{-1-k}{1-k}\vec{b}$.

Обозначим $\dfrac{-1-k}{1-k}=d$, тогда $\vec{a}=d\vec{b}$, но это противоречит условию ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны). Значит наше предположение не верно, т.е. $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны, ч.т.д.

б) Допустим, что $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ и $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарны. Тогда

$2\vec{a}-\vec{b}=k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$; $2\vec{a}-\vec{b}=k\vec{a}+k\vec{b}$; $\vec{a}(2-k)=\vec{b}(k+1)$; $\vec{a}=\dfrac{k+1}{2-k}\vec{b}$.

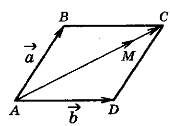
Обозначим $\dfrac{-1-k}{1-k}=d$, тогда $\vec{a}=d\vec{b}$, но это противоречит условию ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны). Значит наше предположение не верно, т.е. $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ и $\vec{a}+\vec{b}$ не коллинеарны, ч.т.д.

в) Допустим, что $\vec{a}+\vec{b}$ и $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$ коллинеарны. Тогда

$\vec{a}+\vec{b}=k\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$; $\vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}+3k\vec{b}$; $\vec{a}(1-k)=\vec{b}(3k+1)$; $\vec{a}=\dfrac{3k+1}{1-k}\vec{b}$.

Обозначим $\dfrac{-1-k}{1-k}=d$, тогда $\vec{a}=d\vec{b}$, но это противоречит условию ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны). Значит наше предположение не верно, т.е. $\vec{a}+\vec{b}$ и $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$ не коллинеарны, ч.т.д.

915. $AM : MC = 4 : 1$ (по условию), то $AM=\dfrac{4}{5}AC$.

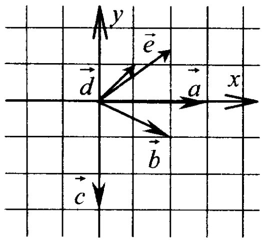


$\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (по правилу параллелограмма). Значит,

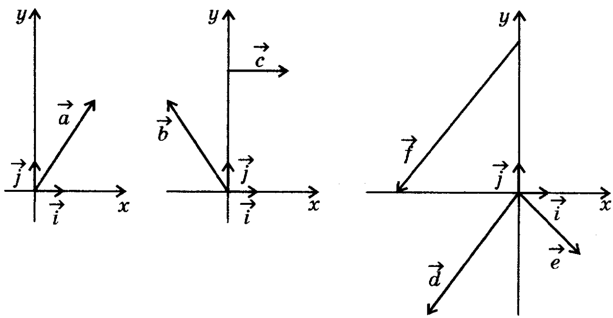
$\overrightarrow{AM}=\dfrac{4}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{4}{5}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

916. **а)** $y = 3, x = -1$; **б)** $x = 4, y = -5$; **в)** $x = 0, y = 3$; **г)** $y = \dfrac{1}{3}, x = -1$.

917.



918.



а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{a}\{2; 3\}$. **б)** $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b}\{-2; 3\}$; $\vec{c} = 2\vec{i}$; $\vec{c}\{2; 0\}$.

в) $\vec{d} = -3\vec{i} - 4\vec{j}, \vec{d}\{-3; -4\}$; $\vec{e} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{e}\{2; -2\}$; $\vec{f} = -4\vec{i} - 5\vec{j}, \vec{f}\{-4; -5\}$.

919. $\vec{a}\{2; 3\}$; $\vec{b}\left\{-\dfrac{1}{2}; -2\right\}$; $\vec{c}\{8; 0\}$; $\vec{d}\{1; -1\}$; $\vec{e}\{0; -2\}$; $\vec{f}\{-1; 0\}$.

920. **а)** $\vec{x} = -3\vec{i} + \dfrac{1}{5}\vec{j}$; **б)** $\vec{y} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$; **в)** $\vec{z} = -\vec{i}$; **г)** $\vec{u} = 3\vec{j}$; **д)** $\vec{v} = \vec{j}$.

921. **а)** $x = 5, y = -2$; **б)** $x = -3, y = 7$; **в)** $x = -4, y = 0$; **г)** $x = 0, y = 0$.

922. **а)** $\vec{a} + \vec{b}\{5; 7\}$; **б)** $\vec{a} + \vec{b}\{4; 1\}$; **в)** $\vec{a} + \vec{b}\{1; 1\}$; **г)** $\vec{a} + \vec{b}\{-1; 0\}$.

923. **а)** $\vec{a} - \vec{b}\{3; 2\}$; **б)** $\vec{a} - \vec{b}\{6; 0\}$; **в)** $\vec{a} - \vec{b}\{-1; 9\}$; **г)** $\vec{a} - \vec{b}\{-7; -2\}$.

924. $2\vec{a}\{6;4\}$; $3\vec{a}\{9;6\}$; $-\vec{a}\{-3;-2\}$; $-3\vec{a}\{-9;-6\}$.

925. $-\vec{a}\{-2;-4\}$; $-\vec{b}\{2;0\}$; $-\vec{c}\{0;0\}$; $-\vec{d}\{2;3\}$; $-\vec{e}\{-2;3\}$; $-\vec{f}\{0;-5\}$.

926. **а)** $\vec{v} = \{6;-15\} + \{15;-6\} = \{21;-21\}$;

б) $\vec{v} = \{8;2\} + \{-3;-6\} + \{8;28\} = \{13;24\}$;

в) $\vec{v} = \{-21;-3\} + \{2;-14\} + \{-2;3\} = \{-21;-14\}$;

г) $\vec{v} = \{7;-2\} - \{2;5\} - \{-3;3\} = \{8;-10\}$.

927. **Дано:** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные.

Доказать: координаты пропорциональны.

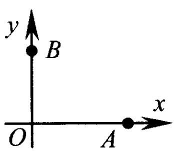
Доказательство.

Пусть $\vec{a}\{x_1;y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;y_2\}$. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные, значит $\vec{a} = k\vec{b}$ и $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$. Отсюда $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = k$, т.е. координаты векторов пропорциональны, ч.т.д.

928. $\vec{a}$ и $\vec{c}$, т.к. $\dfrac{3}{6} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} = k$; $\vec{b}$ и $\vec{d}$, т.к. $\dfrac{-2}{2} = \dfrac{1}{-1} = -1 = k$.

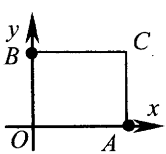
§ 2 Простейшие задачи в координатах

929.



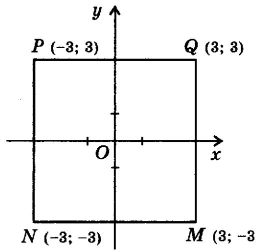
а) $A(5;0)$, $B(0;3)$; **б)** $A(a;0)$, $B(0;b)$.

930.

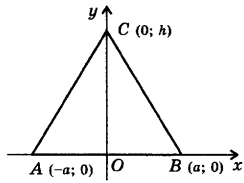


а) $A(6{,}5;0)$; $B(0;3)$; $C(6{,}5;3)$; **б)** $A(a;0)$; $B(0;b)$; $C(a;b)$.

931. В первом случае (так, как показано на рисунке) координаты точек такие:
Q (3; 3), M (3; –3), N (–3; –3).
Если же порядок букв $PNMQ$ (по часовой стрелке), то координаты точек такие: N (3; 3),
M (3; –3), Q (–3; –3).

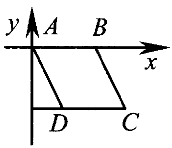


932. Из условия точка C имеет координаты (0; h), O – середина AB, так как CO – это также и медиана ΔABC, следовательно, A (–a; 0), B (a; 0).



<u>**Ответ:**</u> A (–a; 0), B (a; 0), C (0; h).

933.



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ по свойству параллелограмма.
$x_D = x_C - x_B = 7$; $y_D = y_C = -3$, т.е. $D(7; -3)$.

934. Для нахождения координат вектора из координаты его конца вычитают соответствующую координату начала, т.е.
$\overrightarrow{AB}\ \{x_B - x_A; y_B - y_A\}$. **а)** $\overrightarrow{AB}\ \{-2-2; 7-7\}$; $\overrightarrow{AB}\ \{-4; 0\}$.
б) $\overrightarrow{AB}\ \{0; 26)$; **в)** $\overrightarrow{AB}\ \{3; 4\}$. **г)** $\overrightarrow{AB}\ \{-4; -3\}$.

935.

A	(0; 0)	(x; –3)	(6; 1)	(a; b)	(1; 2)
B	(1; 1)	(2; –7)	(3; 1)	(a+c; b+d)	(1; 2)
$\overrightarrow{AB}$	{1; 1}	{5; y}	{–3; –}	{c; d}	{0; 0}

$2 - x = 5$ $\qquad$ $-7 - (-3) = y$

$x = -3$ $\qquad$ $y = -4$

936.

A	(2; –3)	(–10; –11)	(0; 1)	(0; 0)	$(c; d)$	(3; 5)	$(3t+5; 7)$	(1; 3)
B	(–3; 1)	(4; 7)	(6; –11)	(–3; 7)	$(2a-c; 2b-d)$	(3; 8)	$(t+7; -7)$	(–1; –3)
M	(–0,5; –1)	(–3; –2)	(3; –5)	(–1,5; 3,5)	$(a; b)$	(3; 6,5)	$(2t+6; 0)$	(0; 0)

937. Координаты точки C x и y. Тогда $\frac{x+0}{2}=5;\ \frac{y+1}{2}=-3$;

$x = 10$; $y = -7$; $C\,(10; -7)$.

$D\left(\frac{5+10}{2}; \frac{-3-7}{2}\right)$; $D\,(7{,}5; -5)$.

938. а) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{5^2+9^2}=\sqrt{25+81}=\sqrt{106}$;

б) $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$;

в) $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{(-10)^2+(-10)^2}=\sqrt{100+100}=10\sqrt{2}$;

г) $\left|\vec{d}\right|=\sqrt{10^2+17^2}=\sqrt{100+289}=\sqrt{389}$;

д) $\left|\vec{e}\right|=\sqrt{11^2+(-11)^2}=\sqrt{121+121}=11\sqrt{2}$;

е) $\left|\vec{f}\right|=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{100}=10$.

939. а) По условию, расстояние от точки M до оси абсцисс равно абсолютной величине ординаты точки M, т.е. 2.

б) расстояние от точки M до оси ординат равно 3.

в) расстояние l от точки M до начала координат равно

$l=\sqrt{(3-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{9+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

940. а) $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(7-7)^2}=\sqrt{16+0}=4$;

б) $AB=\sqrt{(-5-(-5))^2+(-7-1)^2}=\sqrt{0+64}=8$;

в) $AB=\sqrt{(0-(-3))^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$;

г) $AB=\sqrt{(-4-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{16+9}=5$.

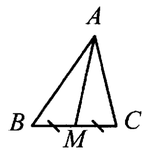
941. $MN=\sqrt{(12-4)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{8^2+(-2)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$;

$NP=\sqrt{(5-12)^2+(-9+2)^2}=\sqrt{(-7)^2+(-7)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$;

$PM=\sqrt{(4-5)^2+(0+9)^2}=\sqrt{82}$.

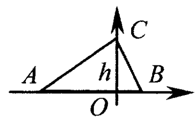
$P_{\Delta MNP}=MN+NP+PM=2\sqrt{17}+7\sqrt{2}+\sqrt{82}$.

942. $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}, \\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_M=\dfrac{1+5}{2}, \\ y_M=\dfrac{2-4}{2}=-1; \end{cases}$ $M(3;\ 1)$.



$AM=\sqrt{(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

943. $B(b;\ 0)$; $A(-a;\ 0)$; $C(0;\ h)$.



$AC=\sqrt{(0-(-a))^2+(h-0)^2}=\sqrt{a^2+h^2}$;

$BC=\sqrt{(0-6)^2+(h-0)^2}=\sqrt{b^2+h^2}$.

944. **а)** В параллелограмме $OACB$ сторона CB параллельна оси абсцисс. OA лежит на оси абсцисс. Значит, ордината y точки C равна ординате точки B. $y=c$. Абсцисса x точки C равна $b+CB$. Но $CB=OA$, поэтому $x=a+b$ и $C\,(a+b;\ c)$.

б) Координаты точки O (0; 0). Координаты точки A (a; 0). По формуле расстояния между двумя точками

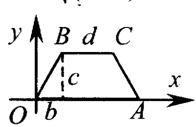
$$CO=\sqrt{(0-(a+b))^2+(0-c)^2}=\sqrt{(a+b)^2+c^2}.$$

$$AC=\sqrt{(a+b-a)^2+(c-0)^2}=\sqrt{b^2+c^2}.$$

<u>**Ответ**</u>: **а)** $C\,(a+b;\ c)$; **б)** $AC=\sqrt{b^2+c^2}$; $CO=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

945. $A(a;\ 0)$, $B(b;\ c)$; $OA=a$, $BC=d$.

$OA\parallel BC$, значит $y_C=y_B=c$; $x_C=b+d$, т.е. $C(b+d;\ c)$.



$AB=\sqrt{(b+d-a)^2+c^2}$; $OC=\sqrt{(b+d)^2+c^2}$.

946. а) По условию, $AB = \sqrt{(x-2)^2 + (1-3)^2} = 2$, тогда $(x-2)^2 +$ $+ (-2)^2 = 4$; $(x-2)^2 = 0$ и $x = 2$.

б) $M_1M_2 = \sqrt{(2x+1)^2 + (3-x)^2} = 7$, тогда $(2x+1)^2 +$ $+ (3-x)^2 = 49$ или $5x^2 - 2x - 39 = 0$. Отсюда $x_1 = 3$; $x_2 = -2{,}6$.

Ответ: а) 2; **б)** 3 или –2,6.

947. а) $AB = \sqrt{(1-0)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{1+(-5)^2} = \sqrt{26}$;

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52}$;

$AC = \sqrt{(5-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$.

$AB = AC = \sqrt{26}$, значит, ΔABC – равнобедренный.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (по теореме, обратной теореме Пифагора), ΔABC – прямоугольный. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot$

$AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{26} = 13$.

б) $AB = \sqrt{(-2-(-4))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

$BC = \sqrt{(0-(-2))^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

$AC = \sqrt{(0-(-4))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16} = 4$.

$AB = BC = \sqrt{13}$, т.е. ΔABC – равнобедренный, поэтому медиана BD является и высотой ΔABC.

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{13-4} = \sqrt{9} = 3.$$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

Ответ: а) 13; **б)** 6.

948. Пусть $O(0; y)$ – искомая точка.

а) $AO=\sqrt{(-3-0)^2+(5-y)^2}=\sqrt{9+(5-y)^2}$;

$BO=\sqrt{(6-0)^2+(4-y)^2}=\sqrt{36+(4-y)^2}$.

$AO = BO$, значит $9 + (5 - y)^2$; $(5 - y)^2 - (4 - y)^2 = 36 - 9$;

$(5 - y - 4 + y)(5 - y + 4 - y) = 27$; $9 - 2y = 27$; $y = -9$.

б) $CO=\sqrt{(4-0)^2+(y+3)^2}=\sqrt{16+(y+3)^2}$;

$DO=\sqrt{(4-0)^2+(1-y)^2}=\sqrt{64+(1-y)^2}$.

$CO = DO$, значит $16 + (y + 3)^2 = 64 + (1 - y)^2$;

$(y + 3)^2 - (1 - y)^2 = 64 - 16$;

$(y + 3 - 1 + y)(y + 3 + 1 - y) = 48$; $(2 + 2y)4 = 8$; $2 + 2y = 12$;

$2y = 10$; $y = 5$.

<u>Ответ:</u> а) $(0; -9)$; **б)** $(0; 5)$.

949. Пусть $O(0; y)$ – искомая точка.

а) $AO=\sqrt{(1-x)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(1-x)^2+4}$;

$BO=\sqrt{(x+3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(x+3)^2+16}$.

$AO = BO$, значит $(1 - x)^2 + 4 = (x + 3)^2 + 16$; $(1 - x)^2 - (x + 3)^2 = 12$;

$(1 - x - x - 3)(1 - x + x + 3) = 12$; $(-2x - 2) \cdot 4 = 12$; $x = -2{,}5$.

б) $CO=\sqrt{(1-x)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(y+3)^2+1}$;

$DO=\sqrt{(3-x)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(3-x)^2+25}$.

$CO = DO$, значит $(1 - x)^2 + 1 = (3 - x)^2 + 25$; $(1 - x)^2 - (3 - x)^2 = 24$;

$(1 - x - 2 + x)(1 - x + 2 - x) = 24$; $-2 \cdot (4 - 2x) = 24$;

$4 - 2x = -12$; $x = 8$.

<u>Ответ:</u> а) $(-2{,}5; 0)$; **б)** $(8; 0)$.

950. **а)** Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ $\{5; 0\}$, вектора $\overrightarrow{QP}$ $\{5; 0\}$. Они соответственно равны и значит, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Отсюда: противоположные стороны MN и PQ равны и параллельны, значит $MNPQ$ – параллелограмм. Диагональ

$MP = \sqrt{(7-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, диагональ

$NQ = \sqrt{(2-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5.$

б) Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ $\{1; 3\}$, вектора $\overrightarrow{QP}$ $\{1; 3\}$. Аналогично п. **а)** получаем, что $MNPQ$ – параллелограмм.

$MP = \sqrt{(-1+5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$,

$NQ = \sqrt{(-2+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

951. **а)** $AB = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{16} = 4; BC = \sqrt{0+4} = 2$;

$CD = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4; AD = \sqrt{0 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$. $AB = CD$, $BC = AD$, значит $ABCD$ – параллелограмм.

$BD = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; AC = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$BD = AC$, значит параллелограмм ABCD является прямоугольником, ч.т.д.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2 \cdot 4 = 8.$

б) $AB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}; BC = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$;

$CD = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}; AD = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$. $AB = BC = CD = AD$, значит $ABCD$ – ромб.

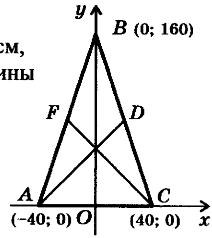
$BD = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}; AC = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. $BD = AC$, значит ромб $ABCD$ является квадратом (частный случай прямоугольника), ч.т.д.

$S_{ABCD} = AB^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 = 17.$

952. Решение приведено в учебнике.

953. Решение приведено в учебнике.

954. ΔABC – данный, AC – основание ΔABC, $AB = BC$, BO – медиана ΔABC, $BO = 160$ см, $AC = 80$ см (по условию). Выразим вершины ΔABC в системе координат.



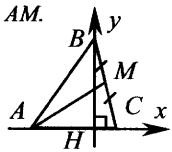
Точка A (–40; 0), точка C (40; 0), точка B (0; 160). AD и CF – медианы ΔABC. Значит, F (–20; 80); D (20; 80).

$$AD=\sqrt{(20+40)^2+(80-0)^2}=\sqrt{60^2+80^2}=$$

$= 100$ см; $CF=\sqrt{(-20-40)^2+(80-0)^2}=\sqrt{(-60)^2+80^2}=100$ см.

955. __Дано:__ ΔABC; $BH \perp AC$; AM – медиана. __Найти:__ AM.

__**Решение.**__



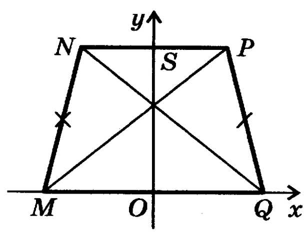
$BH = 10$ см, $AH = 10$ см. Введем систему координат, где H – начало координат.

Тогда $A(-10; 0)$; $C(4; 0)$; $B(0; 10)$.

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2},\ x_M=2;\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2},\ y_M=5.$$

Т.е. $M(2; 5)$. $AM=\sqrt{(10+2)^2+(0-5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ см.

956. $MNPQ$ – данная равнобедренная трапеция, высота которой равна h, а основания MQ и NP равны $2a$ и $2b$, соответственно. Введем Декартову систему координат (далее ДСК) XOY так, что ось OY перпендикулярна основаниям и проходит через их середины, а ось OX проходит через MQ. Центр системы координат – точка O. Докажем, что OY действительно проходит через середины NP и MQ (задача 820).



Пусть OY пересекает MQ в точке O, а NP – в точке S.

$\angle M = \angle Q$. $\Delta MNO = \Delta QPO$ по первому признаку, но тогда $NO = OP$, т.е. ΔNOP – равнобедренный. OS – медиана и высота, тогда $OS \perp NP$, а $NP \parallel MQ$ и $OS \perp MQ$. Координаты вершин

трапеции такие: $M(-a; 0)$, $Q(a; 0)$,
$N(-b; h)$, $P(b; h)$. Тогда найдем диагонали трапеции:

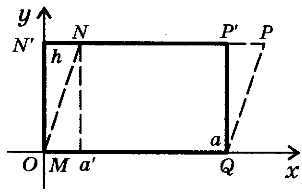
$$MP = \sqrt{(b+a)^2 + h^2} = \sqrt{(a+b)^2 + (-h)^2} = NQ \text{, ч.т.д.}$$

Обратное утверждение: если в трапеции диагонали равны, то эта трапеция равнобедренная. Докажем это.

Аналогично введем ДСК, тогда если $MQ = 2a$ и некоторое число b бо́льшее некоторого числа c. $M(-a; 0)$, $Q(a; 0)$, $N(b; h)$, $P(c; h)$.

Так как $MP = NQ$, то $MP^2 = NQ^2$, т.е. $(a+c)^2 + h^2 = (b-a)^2 + h^2$. Проводя некоторые преобразования, получим: $(b+c)(c-b+2a) = 0$, откуда $b + c = 0$, $b = -c$. Тогда координата точки $N(-c; h)$ и $MN = \sqrt{(a-c)^2 + h^2} = PQ$.

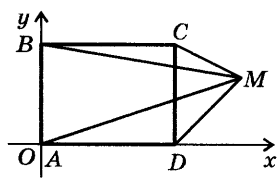
957. Пусть нам даны параллелограмм $MNPQ$ и прямоугольник $MN'P'Q$, причем $MQ = N'P' = NP = a$. Введем ДСК XOY так, что точки O и M совпадают. Напишем координаты всех точек и условие равенства диагоналей через координаты.



$M(0; 0)$, $Q(a; 0)$, $N'(0; h)$, $P'(a; h)$,
$P(a + a'; h)$, $N(a'; h)$. Тогда $(a + a')^2 + h^2 = (a - a')^2 + h^2$ или $a^2 + 2aa' + a'^2 = a^2 - 2aa' + a'^2$.

Из этого равенства получаем: $aa' = 0$. Так как $a \neq 0$, значит, $a' = 0$. Тогда $N(0; h) = N'$, $P(a; h) = P'$, т.е. параллелограмм совпадает с прямоугольником.

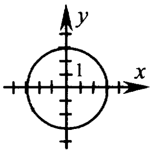
958. Введем ДСК с началом в точке A и ось OX проходит через AD, а ось OY – через AB. Пусть тогда координаты точек такие: $A(0; 0)$, $D(a; 0)$, $B(0; h)$, $C(a; h)$, $M(x; y)$. Имеем: $AM^2 = x^2 + y^2$,



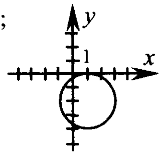
$DM^2 = (x-a)^2 + y^2$, $BM^2 = x^2 + (y-h)^2$, $CM^2 = (x-a)^2 + (y-h)^2$.
$AM^2 + CM^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-h)^2 = BM^2 + DM^2$.

§ 3 Уравнения окружности и прямой

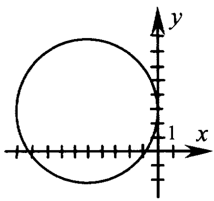
959.



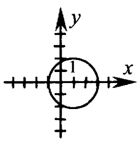
а) $O(0; 0); R = 3;$



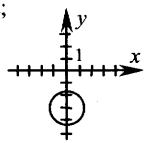
б) $O(1; -2); R = 2;$



в) $O(-5; 3); R = 5;$



г) $O(1; 0); R = 2;$



д) $O(0; -2); R = \sqrt{2}$.

960. Чтобы точки лежали на окружности, надо чтобы координаты точки удовлетворяли уравнению: **а)** уравнению удовлетворяют координаты точек A и C; **б)** точка B; **в)** точки B и D.

961. Из уравнения окружности мы узнаём, что координаты центра $(-5; 1)$ и радиус окружности $\sqrt{16} = 4$.

а) Расстояние от точки до центра окружности должно быть меньше радиуса окружности, т.е. 4. $l_A = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $l_B = 4$, $l_C = \sqrt{13}$, $l_D = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Лишь $\sqrt{13} < 4$, значит, точка C лежит внутри круга, ограниченного окружностью.

б) Из данных, полученных в пункте **а)**, точка B лежит на окружности.

в) Вне окружности лежат две оставшиеся точки A и D.

962. Проверим, лежат ли точки А и В на окружности.

$A(3; 4)$: $3^2 + 4^2 = 25$; $9 + 16 = 25$; $B(4; -3)$: $4^2 + -3 = 25$; $16 + 9 = 25$. $25 = 25$ – верно, значит A и B лежат на окружности и AB – хорда, ч.т.д.

963. $x^2 + y^2 = 25$.

а) $(-4)^2 + y^2 = 25$; $16 + y^2 = 25$; $y^2 = 9$; $y = \pm 3$. $A(4; 3)$; $B(4; -3)$.

б) $x^2 + 3^3 = 25$; $x^2 = 16$; $x = \pm 4$. $A(4; 3)$; $B(-4; 3)$.

964. а) $(3 - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$; $(y - 5)^2 = 25$; $y - 5 = \pm 5$; $y = 10$ или $y = 0$. $A(3; 10)$, $B(3; 0)$.

б) $(x - 3)^2 + (5 - 5)^2 = 25$; $(x - 3)^2 = 25$; $x - 3 = \pm 5$; $x = 8$ или $x = -2$. $A(8; 5)$, $B(-2; 5)$.

965. а) $x^2 + y^2 = 9$; **б)** $x^2 + y^2 = 2$; **в)** $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{4}$.

966. а) $x^2 + (y - 5)^2 = 9$; **б)** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$;

в) $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = \dfrac{1}{4}$; **г)** $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 100$.

967. Уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$ (центр окружности – начало координат). $R = OB$.

$$OB = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = 10$.

968. $x^2 + (y - 6)^2 = R^2 = AB^2$.

$$R = AB = \sqrt{(0+3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Уравнение окружности $x^2 + (y - 6)^2 = 25$.

969. MN – диаметр. $r = MN$.

а) $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{(7+3)^2 + (-3-5)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100+64} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{41} = \sqrt{41}$.

Центр окружности – середина диаметра MN, поэтому координаты центра $(x_0; y_0)$: $x_0 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$; $y_0 = \dfrac{5-3}{2} = 1$.

Таким образом, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 41$.

б) $r = \dfrac{1}{2} MN$, $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2 + (3+1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5}$,

$x_0 = \dfrac{2+4}{2} = 3$; $y_0 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$. Таким образом, $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

970. Центр окружности $O(x;\ 0)$.

$R = OA = \sqrt{(x-1)^2 + 3^2}$; $5 = \sqrt{(x-1)^2 + 3^2}$;

$25 = (x-1)^2 + 9$; $(x-1)^2 = 16$; $x - 1 = \pm 4$; $x = 5$ или $x = -3$.
Итак, O(5; 0) или (–3; 0) следовательно существует две окружности: $(x-5)^2 + y^2 = 25$ или $(x+3)^2 + y^2 = 25$.

971. $R = OA = OB$; т. O лежит на оси OY, значит центр окружности $O(0;\ y)$. $OA = \sqrt{3^2 + y^2}$.

$OA = OB$, значит $OB = \sqrt{0 + (9-y)^2}$; $9 + y^2 = (9-y)^2$;
$9 + y^2 = 81 - 18y + y^2$; $18y = 72$; $y = 4$.

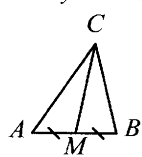
Значит $O(0;\ 4)$. $R = OA = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Уравнение окружности: $x^2 + (y-4)^2 = 25$.

972. а) Решение приведено в учебнике.

б) Уравнение прямой CD имеет вид $ax + by + c = 0$. Точки C и D лежат на прямой CD, поэтому их координаты удовлетворяют этому уравнению: $a \cdot 2 + b \cdot 5 + c = 0$; $a \cdot 5 + b \cdot 2 + c = 0$. Выражая коэффициенты a и b через c из этой системы, получаем: $a = -\frac{c}{7}$; $b = -\frac{c}{7}$. Таким образом, подставив эти выражения в уравнение прямой, получаем: $-\frac{c}{7}x - \frac{c}{7}y + c = 0$. Если $c \neq 0$, то при любом c данное уравнение будет уравнением прямой CD. Если $c = -7$, то $x + y - 7 = 0$.

в) Аналогично находим уравнение прямой MN: $3x - 2y + 2 = 0$.



973. $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{4-4}{2} = 0 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(0;\ 3).$

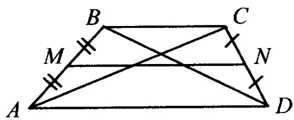
Напишем уравнение прямой по двум точкам:

Точка $M(0;\ 3)$: $0 \cdot a + 3 \cdot b + c = 0$; $3b + c = 0$; $b = -\frac{c}{3}$.

Точка $C(-1; -4)$: $-a-4b+c=0$; $a=-4b+c$; $a=\frac{7}{3}c$.

$\frac{7}{3}cx+\left(-\frac{7}{3}\right)y+c=0$. Умножив обе части уравнения на 3 и разделив на c, получим: $7x-y+3=0$.

974. 1) $A(-2;-2)$: $-2a-2b+c=0$; $a=\frac{1}{2}c-b$.



$C(7; 7)$: $7a+7b+c=0$;

$a=-\frac{1}{7}c-b; \frac{1}{2}c-b=-\frac{1}{7}c-b$;

значит $a=-b$.

$ax-ay+0=0$; $x-y=0$ – уравнение прямой, содержащей AC.

2) $B(-3; 1)$: $-3a+b+c=0$; $a=\frac{b+c}{3}$.

$D(3; 1)$: $3a+b+c=0$; $a=\frac{-b-c}{3}$.

$\frac{b+c}{3}=\frac{-b-c}{3}$; $-b=c$, значит $a=\frac{b-b}{3}=0$,

$0\cdot x+by-b=0$; $y-1=0$ – уравнение прямой, содержащей BD.

3) $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-2-3}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

$\begin{cases} x_N=\dfrac{x_C+x_D}{2}=\dfrac{7+3}{2}=5 \\ y_N=\dfrac{y_C+y_D}{2}=\dfrac{7+1}{2}=4 \end{cases} \Rightarrow N(5; 4)$.

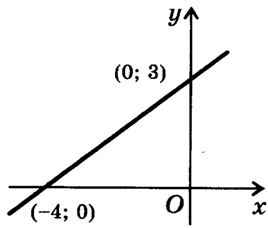
4) $M\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$: $-\frac{5}{2}a-\frac{1}{2}b+c=0$; $b=2c-5a$.

$N(5;\,4)$: $5a + 4b + c = 0$; $a = \dfrac{-4b - c}{5}$; $b = 2c - 5a = 2c - (4b - c)$;

$b = -c$; $a = \dfrac{3}{5}c$; $\dfrac{3}{5}cx - cy + c = 0$.

$3x - 5y + 5 = 0$ – уравнение прямой, содержащей MN.

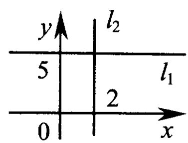
975. Данная прямая пересекается с осью абсцисс в точке, ордината которой равна нулю, т.е. $y = 0$. Поэтому: $3x + 12 = 0$; $x = -4$. Данная прямая пересекается с осью ординат в точке, абсцисса которой равна 0, т.е. $x = 0$. Поэтому: $-4y + 12 = 0$; $y = 3$. Таким образом, координаты точек: $(-4;\,0)$ и $(0;\,3)$.



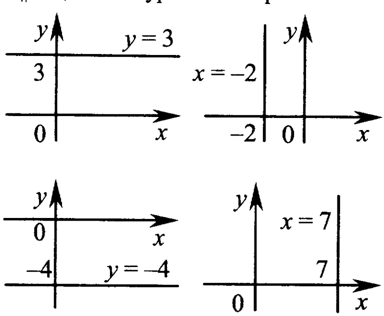
Ответ: $(-4;\,0)$, $(0;\,3)$.

976. $\begin{cases} 4x+3y-6-0 \\ 2x+y-4=0 \,|\cdot(-2) \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+3y-6=0 \\ -4x-2y+8=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2 \\ 2x-2-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases}$

977. **Дано:** $M(2;\,5)$, $M \in a$, $a \parallel OX$; $M \in b$, $b \parallel OY$.
Написать уравнения a и b.
Решение.
$a \parallel OX$, значит уравнение прямой a: $y = 5$.
$b \parallel OY$, значит уравнение прямой b: $x = 2$.

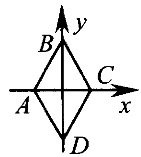


978.



979. Находим уравнение прямой, проходящей через данные точки (задача 972): $x - y + 2 = 0$. $x = 5$ (по условию), тогда имеем: $5 - y + 2 = 0$; $y = 7$. Ордината точки M равна 7.

980. **Дано:** $ABCD$ – ромб; AC OX, BD OY, $AC = 4$ см, $BD = 10$ см. **Написать** уравнение AB, BC, CD, AD.



Решение.

$A(-2; 0)$; $D(0; 5)$; $C(2;0)$; $D(0; -5)$.

1) $A(-2; 0)$ и $B(0; 5)$; AB:

$$\begin{cases} -2a + c = 0 \\ 5b + c = 0 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ b = -\frac{1}{5}c \end{cases} \quad \frac{1}{2}cx - \frac{1}{5}cy + c = 0 \Big| \cdot \frac{10}{c};$$

$5x - 2y + 10 = 0$.

2) $CD \parallel AB$, значит CD: $y = \frac{5}{2}x + b$; т.к. $y(2) = 0$, то $0 = 5 + b$;

$b = -5$; $y = \frac{5}{2}x - 5$.

3) $B(0; 5)$ и $C(2; 0)$; BC:

$$\begin{cases} -a + c = 0 \\ 5b + c = 0 \end{cases} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}c \\ b = -\frac{1}{5}c \end{cases} \quad -\frac{1}{2}cx - \frac{1}{5}cy + c = 0 \Big| \cdot \left(-\frac{10}{c}\right); \; 5x + 2y - 10 = 0.$$

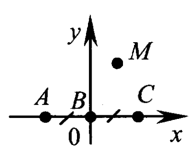
4) $BC \parallel AD$, значит AD: $y = -\frac{5}{2}x + b$; т.к. $y(0) = -5$, то $-5 = 0 + b$;

$b = -5$; $y = -\frac{5}{2}x - 5$.

981. Решение приведено в учебнике.

982. **а)** Введём систему координат.

$A(-1; 0)$; $C(1; 0)$; $M(x; y)$; $B(0; 0)$.



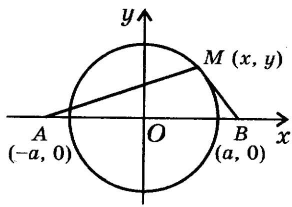
$$\begin{cases} AM^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ BM^2 = x^2 + y^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 \end{cases}$$

$(x+1)^2+y^2+x^2+y^2+(x-1)^2+y^2=50$; $3x^2+3y^2=48$.
$x^2+y^2=16$ – окружность с центром в т. B и радиусом $R=4$.
б) $(x+1)^2+y^2+2(x^2+y^2)+3-((x-1)^2+y^2)=4$;
$x^2+2x+1+y^2+2x^2+2y^2+3x^2-6x+3+3y^2=4$;
$6x^2-4x+6y^2=0$; $3x^2-2x+3y^2=0$;

$$3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+3y^2=0;\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+3y^2=0;$$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$ – окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{3};0\right)$ и радиусом $R=\frac{1}{3}$.

983. Точка O – середина AB. Введем ДСК с началом в точке O. Тогда точка A имеет координаты $(-a;0)$, точка B – $(a;0)$, точка M – $(x;y)$. Получаем:



$AM^2=(x+a)^2+y^2$ и
$BM^2=(x-a)^2+y^2$, тогда
$AM^2+BM^2=k^2$, тогда
$((x+a)^2+y^2)+((x-a)^2+y^2)=k^2$.
Если точка M принадлежит искомому множеству, то данное уравнение удовлетворяет условию: $x^2+y^2=\frac{k^2-2a^2}{2}$.

Рассмотрим 3 варианта решения.

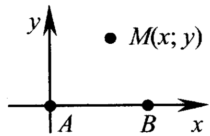
1) $k^2=2a^2$, значит, $\frac{k^2-2a^2}{2}=0$, т.е. $x^2+y^2=0$. Уравнению удовлетворяет только одна точка O – середина отрезка AB. Искомое множество точек состоит из одной точки.

2) $k^2>2a^2$, тогда искомым множеством точек будет окружность радиуса $r=\sqrt{\frac{k^2-2a^2}{2}}$ с центром в точке O.

3) $k^2 < 2a^2$, тогда $\frac{k^2 - 2a^2}{2} < 0$, поэтому нет ни одной точки, которая удовлетворяла бы условию задачи.

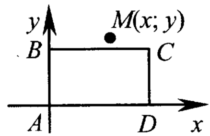
984. Решение приведено в учебнике.

985. Введем систему координат. $A(0; 0)$; $B(a; 0)$; $M(x; y)$.



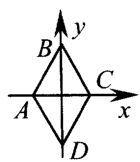
$BM^2 = (a - x)^2 + y^2$; $AM^2 = x^2 + y^2$;
$AB^2 = a$, значит
$(a - x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 2a^2$; $-2ax = a^2$,
$x = -a$ – прямая, перпендикулярная прямой AB и проходящая через точку симметричную т. B.

986. Введем систему координат.



$A(0; 0)$; $D(a; 0)$; $B(0; b)$; $C(a; b)$; $M(x; y)$.
$AM^2 = x^2 + y^2$; $DM^2 = (a - x)^2 + y^2$;
$BM^2 = x^2 + (b - y)^2$; $CM^2 = (a - x)^2 +$
$+ (b - y)^2$; $AB^2 = b^2$.
Сложив, получим $(x^2 + y^2 + (a - x)^2 + y^2) -$
$- (x^2 + (b - y)^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2) = 2b^2$.
$x^2 + y^2 + a^2 - 2ax + x^2 + y^2 - x^2 - b^2 + 2by - y^2 - a^2 + 2ax - x^2 -$
$- b^2 + 2by - y^2 = 2b^2$. $-2b^2 + 4by = 2b^2$; $4by = 4b^2$.
$y = b$ – прямая, проходящая через BC.

987. Введем систему координат.



$A(-a; 0)$; $C(a; 0)$; $B(a, b)$; $D(0; -b)$; $M(x; y)$.
$AM^2 = (x + a)^2 + y^2$; $DM^2 = x^2 + (b + y)^2$;
$BM^2 = x^2 + (b - y)^2$; $CM^2 = (a - x)^2 + y^2$.
Сложив, получим $(x + a)^2 + y^2 + x^2 + (b + y)^2 =$
$= x^2 + (b - y)^2 + (a - x)^2 + y^2$;
$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - x^2 + b^2 + 2by + y^2 =$
$= x^2 + b^2 - 2by + y + a^2 - 2ax + x + y^2$; $2ax + 2by = 0$; $ax + by = 0$.

$y = -\frac{a}{b}b$ – прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей O и перпендикулярная стороне ромба.

Дополнительные задачи

988. а) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} \neq 0$ Если $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}$ коллинеарны (лемма о коллинеарных векторах), то есть число k такое, что $\vec{q} = k\vec{p}$. Имеем: $\vec{a} + x\vec{b} = k\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)\vec{a} + x\vec{b} = 2k\vec{a} - k\vec{b}$. Отсюда:

$1 = 2k$, $x = -k$. Из системы уравнений находим: $k = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$.

Если $x = -\frac{1}{2}$, то $\vec{q} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{p}$, т.е. векторы коллинеарны.

б) $\vec{p} = x\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}$ коллинеарны. Аналогично $\vec{a} + x\vec{b} = k\left(x\vec{a} - \vec{b}\right)$; $1 = kx$, $x = -k$. Получаем: $x^2 = -1$. Это равенство не верно ни при каком значении x. Значит, нет такого числа x, при котором векторы $\vec{p} = x\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$ коллинеарны.

в) $\vec{p} = x\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}$ коллинеарны, если $x = -2$.

г) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = x\vec{a} + \vec{b}$ коллинеарны, если $x = 2$.

989. а) $\vec{p}\ \{7 \cdot 1 - 3 \cdot 5; 7 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)\}$; $\vec{p}\ \{-8; -1\}$.

$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$.

б) $\vec{p}\ \{4 \cdot 6 - 2 \cdot 5; 4 \cdot 3 - 2 \cdot 4\}$; $\vec{p}\ \{14; 4\}$.

$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{169 + 16} = 2\sqrt{53}$.

в) $\vec{p}\ \{5 \cdot \frac{3}{5} - 4 \cdot 6; 5 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot (-1)\}$; $\vec{p}\ \{-21; 5\}$.

$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{(-21)^2 + 5^2} = \sqrt{441 + 25} = \sqrt{466}$.

г) $\vec{p}\ \{3(-2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)); 3(-2 \cdot 5 - 4 \cdot (-1))\}$; $\vec{p}\ \{6; -18\}$.

$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{36 + 324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$.

990. а) $\vec{p}\ \{3+6; 4-8\} = \vec{p}\ \{9; -4\}$, $\vec{q}\ \{6+1; -8+5\} = \vec{q}\ \{7; -3\}$,

$\vec{r}\ \{6-6+1; 8+8+5\} = \vec{r}\ \{1; 21\}$, $\vec{s}\ \{3-6-1; 4+8-5\} = \vec{s}\ \{-4; 7\}$;

б) $|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$,

$|\vec{p}| = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$, $|\vec{q}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$.

991. $d = M_1M_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+0} = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1-x_2|$.

992. Найдем стороны треугольника ABC:

$AB = \sqrt{(12-4)^2+(11-8)^2} = \sqrt{73}$; $BC = \sqrt{(7-12)^2+(0-11)^2} = \sqrt{146}$;

$AC = \sqrt{(7-4)^2+(0-8)^2} = \sqrt{73}$. $AB = AC$ – значит, ΔABC – равнобедренный. $BC \neq AB$; $BC \neq AC$, значит, ΔABC не равносторонний.

993. $AB = \sqrt{(3+5)^2+(-9-6)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$;

$CB = \sqrt{(3+12)^2+(-9-17)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$.

$AB = BC$, т.е. ΔABC – равнобедренный. Значит $\angle A = \angle C$, ч.т.д.

994. а) $AD = \sqrt{(1-5)^2+(1-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$;

$DB = \sqrt{(1-4)^2+(1+3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$;

$DC = \sqrt{(1+2)^2+(1-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

б) $AD = \sqrt{(7-1)^2+(-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$;

$DB = \sqrt{(1+5)^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$;

$DC = \sqrt{(9-1)^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$.

995. $M_1E = \sqrt{(x+2)^2+4^2}$; $M_2E = \sqrt{(x-6)^2+8^2}$. $M_1E = EM_2$, значит $(x+2)^2 + 16 = (x-6)^2 + 64$; $(x+2+x-6)(x+2-x+6) = 48$; $(2x-4)\,8 = 48$; $2x-4 = 6$; $2x = 10$; $x = 5$. Т.е. $E(5; 0)$.

996. **а)** $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-5+3}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{13+5}{2} = 9 \end{cases}$ $M(-1; 9)$;

$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3-3}{2} = 0 \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$ $N(0; 2)$;

$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-5-3}{2} = 4 \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{13-1}{2} = 6 \end{cases}$ $K(-4; 6)$.

б) $BK = \sqrt{(3+4)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$.

в) $MN = \sqrt{1^2 + (2-9)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$;

$NK = \sqrt{4^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$;

$NK = \sqrt{(-1+4)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

997. Находим расстояние между двумя точками по формуле:

$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;

$AC = \sqrt{(-3-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{36+0} = 6$;

$BC = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-5)^2} = 3\sqrt{2}$;

$CD = \sqrt{(0+3)^2 + (-1-2)^2} = 3\sqrt{2}$;

$DA = \sqrt{(3-0)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$.

Все стороны четырехугольника равны между собой, значит, $ABCD$ – ромб. Рассмотрев ΔABC, получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, т.е. ΔABC прямоугольный. Таким образом, $ABCD$ – квадрат.

998. $AB=\sqrt{(1-(-2))^2+(4-(-3))^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$;

$BC=\sqrt{(8-1)^2+(7-4)^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$;

$CD=\sqrt{(5-8)^2+(0-7)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$;

$AD=\sqrt{(5-(-2))^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$.

Итак, $AB=BC=CD=AD$, значит $ABCD$ – ромб.

$AC=\sqrt{100+100}=10\sqrt{2}$; $BD=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$.

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}10\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=40$.

999. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм; $A(-4;4)$; $B(-5;1)$; $C(x;y)$; $D(-1;5)$.

Найти: $(x;y)$.

Решение.

$AB=\sqrt{(-5-(-4))^2+(1-4)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$; $BC=\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$;

$AD=\sqrt{(-1-(-4))^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$; $CD=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$.

В параллелограмме противоположные стороны равны, значит

$$\begin{cases}(x+5)^2+(y-1)^2=10\\(x+1)^2+(y-5)^2=10\end{cases}\quad\begin{cases}x^2+10x+25+y^2-2y+1=10\\x^2+2x+1+y^2-10y+25=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}8x+8y=0\\(x+1)^2+(y-5)^2=10\end{cases}\quad\begin{cases}x=-y\\(1-y)^2+(y-5)^2=10\end{cases}$$

$1-2y+y^2+y^2-10y+25-10=0$; $y^2-6y+8=0$. $y_1=4$; $y_2=2$.

Если $y=4$, $x=-4$, т.е. $C(-4;4)$. Если $y=2$, $x=-2$, т.е. $C(-2;2)$.

1000. **а)** $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ окружность с центром $(1;-2)$ и $R=5$;

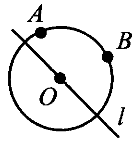
б) $x^2+(y-7)^2=1$ окружность с центром $(0;7)$ и $R=1$;

в) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$, $(x+4)^2+(y-2)^2=-20$ – не окружность;

г) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ окружность с центром $(1;-2)$ и $R=5$;

д) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$, $x^2-4x+4+y^2-2y+1-4=0$, $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ окружность с центром $(2;1)$ и $R=2$.

1001. Пусть x_0 – абсцисса центра искомой окружности. Ее ордината равна $x_0 + 2 = y_0$. Тогда уравнение окружности принимает вид: $(x - x_0)^2 + (y - x_0 - 2)^2 = r^2$. По условию точки A и B лежат на окружности, поэтому



$(3 - x_0)^2 + (0 - x_0 - 2)^2 = r^2$ и

$(-1 - x_0)^2 + (2 - x_0 - 2)^2 = r^2$. Приравняем левые части. Тогда

$(3 - x_0)^2 + (0 - x_0 - 2)^2 = (-1 - x_0)^2 + (2 - x_0 - 2)^2$.

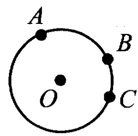
$9 - 6x_0 + 2x_0^2 + 4x_0 + 4 - 2x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$ или $12 - 4x_0 = 0$;

$4x_0 = 12$; $x_0 = 3$. Тогда $y_0 = x_0 + 2 = 5$. Таким образом, $r^2 = 25$.

Уравнение искомой окружности: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

1002. а) $AO = \sqrt{(1-x)^2 + (-4-y)^2}$; $BO = \sqrt{(4-x)^2 + (5-y)^2}$;

$CO = \sqrt{(3-x)^2 + (-2-y)^2}$.



$AO^2 = BO^2$:

$(1 - x)^2 + (4 + y)^2 = (4 - x)^2 + (5 - y)^2$;

$(1 - x - 4 + x)(1 - x + 4 - x) =$

$= (5 - y - 4 - y)(5 - y + 4 + y)$;

$-3(5 - 2x) = (1 - 2y)9$; $2x - 5 = 3 - 6y$; $x = 4 - 3y$.

$BO^2 = CO^2$:

$(4 - x)^2 + (5 - y)^2 = (3 - x)^2 + (2 + y)^2$;

$(4 - x - 3 + x)(4 - x + 3 - x) = (2 + y + 5 - y)(2 + y - 5 + y)$;

$7 - 2x = 7(2y - 3)$; $-2x - 14y + 28 = 0$; $x = 14 - 7y$,

$14 - 7y = 4 - 3y$; $10 = 4y$.

$$y = \frac{5}{2};\ x = -\frac{7}{2} \Rightarrow O\left(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

$$R = AO\sqrt{\left(1 + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{169}{4}} = \sqrt{\frac{250}{4}} = \sqrt{\frac{125}{2}}.$$

Уравнение окружности: $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}$.

б) $AO=\sqrt{(3-x)^2+(7+y)^2}$; $BO=\sqrt{(8-x)^2+(2+y)^2}$;

$CO=\sqrt{(6-x)^2+(2-y)}$.

$AO^2=BO^2$:

$(3-x)^2+(7+y)^2=(8-x)^2+(2+y)^2$; $9-6x+x^2+49+14y+y^2=$
$=64-16x+x^2+4+4y+y^2$; $10x+10y-10=0$;

$BO^2=CO^2$:

$(8-x)^2+(2+y)^2=(6-x)^2+(2-y)^2$;

$64-16x+x^2+4+4y+y^2=36-12x+x^2+4-4y+y^2$;

$-4x+8y+28=0$; $x-2y-7=0$; $x=7+2y$; $1-y=7+2y$; $-6=3y$;
$y=-2$; $x=3$, т.е. $O(3;-2)$.

$R=OA=\sqrt{(3-3)^2+(7-2)^2}=\sqrt{25}=5$.

Уравнение окружности: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

1003. AB: $\begin{cases}-7a+5b+c=0\\3a-b+c=0\end{cases}\begin{cases}-7a+15a+5c+c=0\\b=3a+c\end{cases}\begin{cases}8a=-6c\\b=3a+c\end{cases}\begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}c\\b=-\dfrac{5}{4}c\end{cases}$

$-\dfrac{3}{4}cx-\dfrac{5}{4}cy+c=0$; $3x+5y-4=0$.

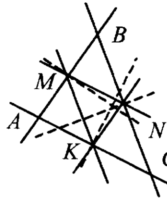
BC: $\begin{cases}3a-b+c=0\\5a+3b+c=0\end{cases}\begin{cases}b=3a+c\\5a+9a+3c+c=0\end{cases}\begin{cases}b=3a+c\\a=-\dfrac{2}{7}c\end{cases}\begin{cases}b=\dfrac{1}{7}c\\a=-\dfrac{2}{7}c\end{cases}$

$-\dfrac{2}{7}cx+\dfrac{1}{7}cy+c=0$; $2x-y-7=0$.

AC: $\begin{cases}-7a+5b+c=0\\5a+3b+c=0\end{cases}\begin{cases}21a-15b-3c=0\\25a+15b+5c=0\end{cases}\begin{cases}a=-\dfrac{1}{23}c\\b=-\dfrac{6}{23}c\end{cases}$

$-\dfrac{1}{23}cx-\dfrac{6}{23}cy+c=0$; $x+6y-23=0$.

Средние линии:



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-7+3}{2} = -2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-2;\, 2).$$

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow N(4;\, 1).$$

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-7+5}{2} = -1 \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{5+3}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow K(-1;\, 4).$$

$$MN\text{: } \begin{cases} -2a + 2b + c = 0 \\ 4a + b + c = 0 \end{cases} \begin{cases} 2a = 2b + c \\ b = -4a - c \end{cases} \begin{cases} a = -\dfrac{1}{10}c \\ b = -\dfrac{6}{10}c \end{cases}$$

$$-\frac{1}{10}cx - \frac{6}{10}cy + c = 0\,;\; x + 6y - 10 = 0.$$

$$NK\text{: } \begin{cases} 4a + b + c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \end{cases} \begin{cases} b = -4a - c \\ a = 4b + c \end{cases} \begin{cases} b = -\dfrac{5}{17}c \\ a = -\dfrac{3}{17}c \end{cases}$$

$$-\frac{3}{17}cx - \frac{5}{17}cy + c = 0\,;\; 3x + 5y - 17 = 0.$$

$$MK\text{: } \frac{1}{3}cx - \frac{1}{6}cy + c = 0\,;\; 2x - y + 6 = 0.$$

Серединные перпендикуляры:

$l_1 \perp AB$, AB: $3x + 5y - 4 = 0$, l_2: $ax + by + c = 0$. И условия перпендикулярности прямых находим, что $3a + 5b = 0$; $3a = -5b$. При $a = 5$, $b = -3$, l_1: $5x - 3y + c = 0$, т.к. $M \in l_1$, т.е. $5(-2) - 3 \cdot 2 + c = 0$, $c = 16$, то l_1: $5x - 3y + 16 = 0$.

$l_2 \perp AC$, AC: $x + 6y - 23 = 0$, из условия перпендикулярности прямых находим, что l_2: $6x - y + c = 0$, т.к. $K \in l_2$, то $6(-1) - 4 + c = 0$, $c = 10$, то l_2: $6x - y + 10 = 0$.

$l_3 \perp BC$, BC: $2x - y - 7 = 0$, из условия перпендикулярности прямых находим, что l_3: $x + 2y + c = 0$, т.к. $N \in l_3$, то $4 + 2 + c = 0$, $c = -6$, то l_3: $x + 2y - 6 = 0$.

1004. Предположим, что прямые пересекаются или совпадают. Тогда у них есть хотя бы одна общая точка Q. Координаты ее $(x_0; y_0)$ удовлетворяют обоим уравнениям, т.е.
$3x_0 - 1{,}5y_0 + 1 = 0$ и $2x_0 - y_0 - 3 = 0$. Сделав преобразования, получаем: $(3x_0 - 1{,}5y_0 + 1) - 1{,}5\,(2x_0 - y_0 - 3) = 0$ или
$3x_0 - 1{,}5y_0 + 1 - 3x_0 + 1{,}5y_0 + 4{,}5 = 0$ или $5{,}5 = 0$, что не верно.
Значит, предположение, что прямые пересекаются или совпадают, не верно. Таким образом, прямые, заданные уравнениями $3x - 1{,}5y + 1 = 0$ и $2x - y + 3 = 0$, параллельны.

1005. а) AB: $\begin{cases} -2a + c = 0 \\ 3a + 2\frac{1}{2}b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ b = -c \end{cases}$ $\frac{1}{2}cx - cy + c = 0;\ x - 2y + 2 = 0.$

Подставим координаты точки C: $6 - 2 \cdot 4 + 2 = 0$, $0 = 0$ – верно, значит $C \in AB$, т.е. A, B, C лежат на одной прямой.

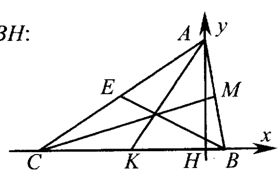
б) AB: $\begin{cases} 3a + 10b + c = 0 \\ 3a + 12b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -\frac{1}{3}c \\ b = 0 \end{cases}$ $-\frac{1}{3}cx + c = 0;\ x - 3 = 0.$

Подставим координаты точки C: $3 - 3 = 0$, $0 = 0$ – верно, значит $C \in AB$, т.е. A, B, C лежат на одной прямой.

в) AB: $\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + 5b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = c \\ a = -3c \end{cases}$ $-3cx + cy + c = 0;\ 3x - y - 1 = 0.$

Подставим координаты точки C: $3(-10) - (-31) - 1 = 0$, $-30 + 31 - 1 = 0$, $0 = 0$ – верно, значит $C \in AB$, т.е. A, B, C лежат на одной прямой.

1006. Введем систему координат. В ΔABH:



$BH = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8$,
$CH = 28 - 8 = 20$, откуда $B(8; 0)$;
$C(-20; 0)$; $A(0; 15)$. AK – медиана, $K(-6; 0)$:

$AK = \sqrt{6^2 + 15^2} = \sqrt{36 + 225} = \sqrt{261}$.

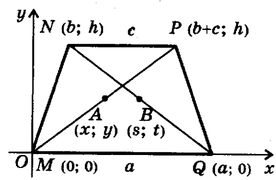
CM – медиана, $M(4; 7{,}5)$.

$$CM = \sqrt{24^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{576 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{2529}{4}} = \frac{\sqrt{2529}}{2}.$$

BE – медиана, $E(-10;\ 7{,}5)$.

$$BE = \sqrt{18^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{324 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{1521}{5}} = \frac{39}{2} = 19{,}5.$$

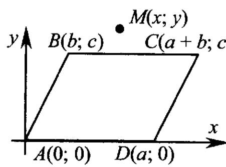
1007. Нам дана трапеция $MNPQ$. Введем ДСК с центром в точке M, ось OX лежит на MQ. Пусть точки имеют следующие координаты: $M(0;\ 0)$, $Q(a;\ 0)$, $N(b;\ h)$, $P(b + c;\ h)$, $A(x;\ y)$, $B(s;\ t)$, где A – середина MP, B – середина NQ. Выразим x, y, s и t через координаты вершин трапеции и запишем через них длину отрезка AB:



$$AB = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)^2} = \frac{a-c}{2} \text{ если } a \ge c \text{ и } \frac{c-a}{2},$$

если $c > a$. Теперь учтем, что a – длина MQ, а c – длина NP.

1008. Введем систему координат.



$A(0;\ 0)$, $B(b;\ c)$, $C(a + b;\ c)$; $D(a;\ 0)$.

$AM^2 = x^2 + y^2$;

$CM^2 = (a + b - x)^2 + (c - y)^2$;

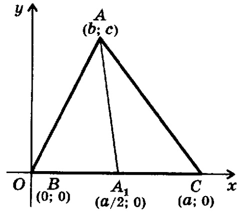
$BM^2 = (b - x)^2 + (c - y)^2$;

$DM^2 = (a - x)^2 + y^2$;

$(AM^2 + CM^2) - (BM^2 + DM^2) =$

$= x^2 + y^2 + (a + b - x)^2 + (c - y)^2 - (b - x)^2 - (c - y)^2 - (a - x)^2 -$
$- y^2 = x^2 + (a + b - x)^2 - (b - x)^2 - (a - x)^2 = x^2 + a^2 + b^2 + x^2 +$
$+ 2ab - 2ax - 2bx - b^2 + 2bx - x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = 2ab$ не зависит от координат точки M.

1009. Возьмем ΔABC с проведенной медианой AA_1. Введем ДСК с центром в точке B так, что OX проходит через BC. Пусть $A(0;\ 0)$, $B(b;\ c)$, $C(a;\ 0)$, тогда $A_1\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$. Имеем:



$AA_1^2 = \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + c^2$; $AB^2 = b^2 + c^2$; $BC^2 = a^2$;

$AC^2 = (b - a)^2 + c^2$.

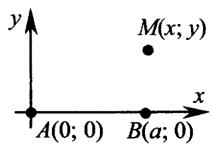
Запишем данное выражение: $2AC^2 + 2AB^2 - BC^2 =$
$= 2\,((b - a)^2 + c^2) + 2\,(b^2 + c^2) - a^2 = 4\,((b^2 - ab + \ ) + c^2) =$
$= 4\,((b - \ )^2 + c^2) = 4AA_1{}^2$. Поэтому:

$$AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}\ .$$

Если AA_1 и BM – медианы треугольника, причем по условию $AA_1 = BM$, то по доказанному ранее запишем:

$\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2} = \sqrt{2BA^2 + 2BC^2 - AC^2}$ или
$2AC^2 + 2AB^2 - BC^2 = 2BA^2 + 2BC^2 - AC^2$, $3AC^2 = 3BC^2$ или
$AC = BC$, т.е. треугольник равнобедренный.

1010. а) Введем систему координат;
$A(0;\,0)$; $B(a;\,0)$; $M(x;\,y)$.
$AM^2 = x^2 + y^2$. $BM^2 = (a - x)^2 + y^2$;
$AB^2 = a^2$,
$x^2 + y^2 + 2ax = 3a^2$; $(x^2 + 2ax + a^2) -$
$- a^2 + y^2 = 3a^2$; $(x + a)^2 + y^2 = 4a^2$ – окружность с центром $(-a;\,0)$ и $R = 2a$.



б) Введем систему координат, $A(0;\,0)$; $B(a;\,0)$; $M(x;\,y)$.
$AM^2 = x^2 + y^2$, $BM^2 = (a - x)^2 + y^2$,
$AB^2 = a^2$; $x^2 + y^2 + 2(a - x)^2 + 2y^2 = 6a^2$; $3x^2 - 4ax + 3y^2 = 4a^2$;

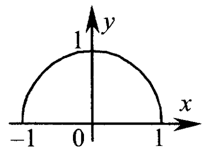
$3\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + 3y^2 = \frac{16}{3}a^2$; $\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}a^2$ – окружность с

центром $\left(\frac{2}{3}a;\,0\right)$ и $R = \frac{3}{4}a$.

Глава XI.
Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

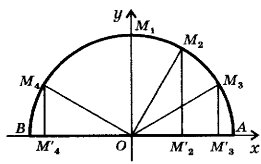
§ 1 Синус, косинус и тангенс угла

1011. а) Абсцисса всех точек на единичной полуокружности принимает значения от –1 до 1, значит она может иметь значения 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$.



б) Ордината всех точек на единичной полуокружности принимает значения от 0 до 1, значит она может иметь значения 0,6; $\frac{1}{7}$.

1012. Координаты точек должны быть решением уравнения единичной полуокружности $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$.



M_1 (0; 1): $0^2 + 1^2 = 1$, $1 \geq 0$ – верно.

$M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$ – верно.

$M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$ – верно.

$M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$: $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1, \frac{1}{2} \geq 0$ – верно.

A (1; 0): $1^2 + 0^2 = 1$, $0 \geq 0$ – верно. B (–1; 0): $0^2 + (-1)^2 = 1$, $0 \geq 0$ – верно.

Все точки лежат на единичной полуокружности.

$\sin \angle AOM_1 = \dfrac{MO_1}{M_1O} = 1, \cos \angle AOM_1 = \dfrac{O}{OM_1} = 0, \operatorname{tg} \angle AOM_1$ – не существует.

$\sin \angle AOM_2 = \dfrac{M_2M_2'}{OM_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \cos \angle AOM_2 = \dfrac{OM_2'}{OM_2} = \dfrac{1}{2},$

$\operatorname{tg} \angle AOM_1 = \dfrac{\sin \angle AOM_2}{\cos \angle AOM_2} = \sqrt{3}.$

$\sin \angle AOM_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos \angle AOM_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} \angle AOM_3 = 1.$

$\sin \angle AOM_4 = \dfrac{1}{2}, \cos \angle AOM_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$\operatorname{tg} \angle AOM_4 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

1013. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, тогда $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

а) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$;

в) $\sin\alpha = \sqrt{1 - (-1)^2} = 0$.

1014. Основное тригонометрическое тождество:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

а) $\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}, \cos^2\alpha = \dfrac{3}{4}, \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{16}, \cos^2\alpha = \dfrac{15}{16}, \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

в) $\cos^2\alpha = 1; \cos\alpha = \pm 1$.

1015. а) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1-1} = 0; \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0}{1} = 0$;

б) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \pm\dfrac{1}{2}; \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\dfrac{1}{2} : \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. $0° < \alpha < 90°$, значит

$\cos\alpha > 0$, т.е. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$;

г) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. $90° < \alpha < 180°$, значит

$\cos\alpha < 0$, т.е. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$.

1016. $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} 120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = -\sqrt{3}$.

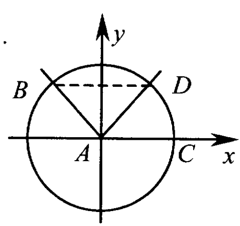
$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 135° = -1$.

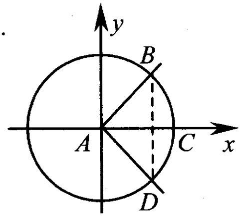
$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \frac{1}{2}$; $\cos 150° = \cos(180° - 30°) =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tg} 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

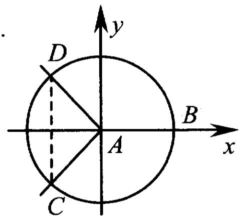
1017. а) $\sin\angle A = \sin\angle CAD = \sin\angle CAB = \frac{2}{3}$.



б) $\cos\angle A=\cos\angle CAD=\cos\angle CAB=\frac{3}{4}$.



в) $\cos\angle A=\cos\angle CAD=\cos\angle CAB=-\frac{2}{5}$.



1018. Обозначим координаты точки A –x; y. Тогда $x = OA\cos a$, $y = OA\sin a$.

а) По условию $OA = 3$, $\angle\alpha = 45°$: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $y = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$; $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

б) $x = OA\cdot\cos\alpha = 1{,}5\cdot 0 = 0$; $y = OA\cdot\sin\alpha = 1{,}5\cdot 1 = 1{,}5$; $A\ (0;\ 1{,}5)$.

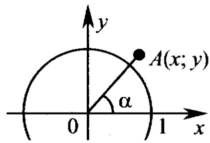
в) $x = 5\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$; $y = 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2}\right)$.

г) $x = 1\ (-1) = -1$; $y = 1\cdot 0 = 0$; $A\ (-1;\ 0)$.

д) $x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $y = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$; $A\ (\sqrt{3};\ 1)$.

1019. а) $\begin{cases} 2 = OA \cdot \cos\alpha \\ 2 = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} 2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos\alpha \\ 2 = 2\sqrt{2} \cdot \sin\alpha \end{cases} \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$



б) $\begin{cases} 0 = OA \cdot \cos\alpha \\ 3 = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{0 + (0-3)^2} = 3$

$$\begin{cases} 0 = 3 \cdot \cos\alpha \\ 3 = 3 \cdot \sin\alpha \end{cases} \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$

в) $\begin{cases} -\sqrt{3} = OA \cdot \cos\alpha \\ 1 = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{\left(0 - \left(-\sqrt{3}\right)\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$$\begin{cases} -\sqrt{3} = 2 \cdot \cos\alpha \\ 1 = 2 \cdot \sin\alpha \end{cases} \begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 150^\circ.$$

г) $\begin{cases} -2\sqrt{2} = OA \cdot \cos\alpha \\ 2\sqrt{2} = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{\left(0 - \left(-2\sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(0 - 2\sqrt{2}\right)^2} = 4$

$$\begin{cases} -2\sqrt{2} = 2 \cdot \cos\alpha \\ 2\sqrt{2} = 4 \cdot \sin\alpha \end{cases} \begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 135^\circ.$$

§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

1020. $S_{\Delta ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin A$.

а) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{6\sqrt{8}}{2} \cdot 4 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6}$ см^2.

б) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 18\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \cdot 18\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = 27$ см^2.

в) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 \cdot 0{,}74 = 36{,}41$ см^2.

1021. $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$. Так как $\Delta ABD = \Delta BCD$ (по двум сторонам и углу между ними), $S_{ABD} = S_{BCD}$, значит

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\left(\frac{1}{2}ab\sin\alpha\right) = ab\sin\alpha \text{, ч.т.д.}$$

1022. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\angle A$; $60 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 15 \cdot \sin 30°$; $120 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 15$;

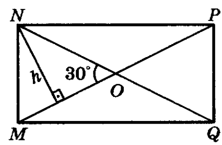
$AB = 16$ см.

1023. $MNPQ$ – данный прямоугольник:

$MP = 10$ см $= NQ$; $\angle MON = 30°$.

$S_{MNPQ} = S_{\Delta MNP} + S_{\Delta MNQ}$.

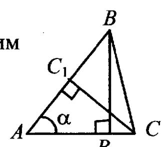
$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} MP \cdot h$.



Из ΔMNO: $h = \frac{1}{2} \cdot NO = 5$ см $: 2 = \frac{5}{2}$ см.

$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{5}{2} = 12{,}5$ см^2 и $S_{MNPQ} = 12{,}5 \cdot 2 = 25$ см^2.

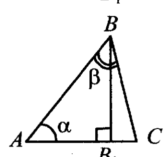
1024. а) Рассмотрим ΔABB_1: $AB = \frac{h_b}{\sin\alpha}$. Рассмотрим ΔACC_1: $AC = \frac{h_c}{\sin\alpha}$.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b}{\sin\alpha} \cdot \frac{h_c}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{h_b h_c}{2\sin\alpha}.$$

б) Рассмотрим ΔABB_1: $AB = \frac{h}{\sin\alpha}$.

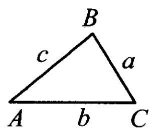
Рассмотрим ΔB_1BC:



$$\frac{h}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}=\frac{h}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{\sin\alpha}\cdot\frac{h}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\sin\beta=\frac{h^2\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}.$$

1025. а) По тереме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}$.



$$\frac{14}{\sin 80^\circ}=\frac{a}{\sin 60^\circ};\ a\approx\frac{14}{0{,}984}\cdot 0{,}86\approx 12{,}236.$$

$$\frac{14}{\sin 80^\circ}=\frac{b}{\sin 40^\circ};\ b\approx\frac{14}{0{,}984}\cdot 0{,}642\approx 9{,}134.$$

б) $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)=180^\circ-105^\circ=75^\circ$.

$\angle B=\angle C$, значит треугольник равнобедренный, т.е. $b=c$.

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}$.

$$\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{4{,}5}{\sin 75^\circ};\ a\approx\frac{4{,}5}{0{,}9659}\cdot 0{,}5\approx 2{,}33.$$

в) По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}$.

$$\frac{16}{\sin 80^\circ}=\frac{10}{\sin\angle B};\ \sin\angle B\approx\frac{10\cdot 0{,}9848}{16}=0{,}6155;\ \angle B\approx 37^\circ 59'.$$

$\angle C\approx 180^\circ-(80^\circ+37^\circ 59')\approx 62^\circ 1'$.

$$\frac{16}{\sin 80^\circ}=\frac{c}{\sin 62^\circ 1'};\ c\approx\frac{16\cdot 0{,}8830}{0{,}9848}\approx 14{,}346.$$

г) $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-(45^\circ+70^\circ)=65^\circ$.

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}$.

$$\frac{24{,}6}{\sin 65^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ};\ b\approx\frac{24{,}6}{0{,}9063}\cdot 0{,}7071\approx 19{,}193.$$

$$\frac{24{,}6}{\sin 65^\circ}=\frac{c}{\sin 70^\circ};\ c\approx\frac{24{,}6}{0{,}9063}\cdot 0{,}9397\approx 25{,}507.$$

д) По теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin\angle C}=\dfrac{BC}{\sin\angle A}=\dfrac{AC}{\sin\angle B}$.

$\dfrac{10}{\sin 60^\circ}=\dfrac{7}{\sin\angle B}$; $\sin\angle B\approx\dfrac{7\cdot 0{,}8660}{10}=0{,}6062$; $\angle B\approx 37^\circ 19'$;

$\angle C\approx 180^\circ-(60^\circ+37^\circ 19')$; $\angle C\approx 82^\circ 41'$;

$\dfrac{10}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 42^\circ 41'}$; $c\approx\dfrac{10}{0{,}8660}\cdot 0{,}6780\approx 7{,}829$.

е) Применим теорему косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\angle A$;
$c^2=2\cdot 39{,}69-2\cdot 39{,}69\cdot\cos 54^\circ$; $c^2\approx 79{,}38-79{,}38\cdot 0{,}5878\approx 32{,}72$;
$c\approx 5{,}72$;
так как $a=b=6{,}3$, то треугольник равнобедренный,
$\angle A=\angle B=(180^\circ-54^\circ):2=63^\circ$.

ж) По теореме косинусов: $a^2\approx 32^2+45^2-2\cdot 32\cdot 45\cdot 0{,}0523\approx$
$\approx 1024+2025-150{,}624=2898{,}38$; $a\approx 53{,}84$.

По теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin\angle C}=\dfrac{BC}{\sin\angle A}=\dfrac{AC}{\sin\angle B}$.

$\dfrac{53{,}84}{\sin 87^\circ}\approx\dfrac{32}{\sin\angle B}$; $\dfrac{53{,}84}{0{,}9986}\approx\dfrac{32}{\sin\angle B}$; $\sin\angle B\approx 0{,}5935$; $\angle B=36^\circ 24'$;

$\angle C\approx 180^\circ-(87^\circ+36^\circ 24')\approx 56^\circ 36'$.

з) По теореме косинусов $20^2=18^\circ+14^2-2\cdot 18\cdot 14\cdot\cos\angle C$;
$\cos\angle C=0{,}2381$; $\angle C\approx 76^\circ 13'$.
$18^2=14^2+20^2-2\cdot 14\cdot 20\cdot\cos\angle B$; $\cos\angle B\approx 0{,}4857$;
$\angle B\approx 60^\circ 57'$.

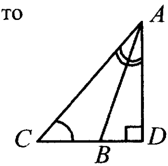
и) По теореме косинусов: $7{,}3^2=6^2+4{,}8^2-2\cdot 6\cdot 4{,}8\cdot\cos\angle B$;
$\cos\angle B=0{,}0998$; $\angle B=84^\circ 16'$;
$4{,}8^2=6^2+7{,}3^2-2\cdot 6\cdot 7{,}3\cdot\cos\angle C$; $\cos\angle C\approx 0{,}7563$;
$\angle C\approx 40^\circ 52'$. $\angle A\approx 180^\circ-(84^\circ 16'+40^\circ 52')\approx 54^\circ 52'$.

1026. $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$. Исходя из

теоремы синусов: $AB=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin B}=\dfrac{12\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{12\cdot 0{,}8660}{0{,}7071}=14{,}7$ см.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 14{,}7\cdot 12\cdot 0{,}9659=85{,}19$ см^2.

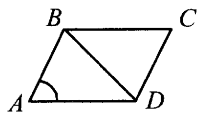
1027. Рассмотрим ΔADC: т.к. $\angle D = 90°$, $\angle C = 30°$, то $AC = 2AD = 6$ м. Рассмотрим ΔACB:
$\angle B = 180° - (30° + 45°) = 105°$.
По теореме синусов:



$$\frac{AB}{\sin 30°} = \frac{6}{\sin 105°};\ AB \approx \frac{6 \cdot 0{,}5}{0{,}9659} \approx 3{,}1 \text{ м};$$

$$\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{6}{\sin 105°};\ BC \approx \frac{6 \cdot 0{,}7071}{0{,}9659} \approx 4{,}4 \text{ м}.$$

1028. В ΔABD по теореме синусов:

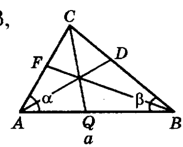


$$\frac{4{,}4}{\sin 22°30'} = \frac{7\frac{1}{3}}{\sin \angle ABD};$$

$$\sin \angle ABD = \frac{7\frac{1}{3} \cdot 0{,}3827}{4{,}4};\ \angle B \approx 39°38'.$$

$\angle ADB \approx 180° - (22°30' + 39°38') = 117°52'$.

1029. ABC – данный треугольник. $\angle A = \alpha$; $\angle B = \beta$, $AB = a$. AD – биссектриса $\angle A = \alpha$, BF – биссектриса $\angle B = \beta$,
CQ – биссектриса $\angle C$.
В ΔABD найдем AD.



$$AD = \frac{\sin\beta \cdot a}{\sin D} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\left(180° - \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$BF = \frac{\sin\alpha \cdot a}{\sin F} = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\left(180° - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right)} = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

$$CQ = \frac{\sin\alpha \cdot AC}{\sin Q} \text{ (в треугольнике } ACQ).$$

$$\angle AQC = 180° - \left(\alpha + \frac{\angle C}{2}\right) = 180° - \alpha - \frac{180° - \alpha - \beta}{2} = 90° - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

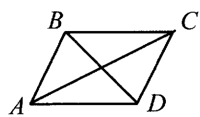
Если $\alpha \geq \beta$, то $\frac{\alpha-\beta}{2} \geq 0$; $\sin\left(90° - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$AC = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$ (по теореме синусов).

$$CQ = \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta) \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$ если $\alpha \geq \beta$.

$$CQ = \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta) \cdot \cos\frac{\beta-\alpha}{2}},$$ если $\alpha < \beta$.

1030. **Дано:** $ABCD$ – параллелограмм; $AB = a$; $AD = b$; $\angle A = \alpha$. **Найти:** BD, AC, $\angle AOB$.



Решение.

По теореме косинусов:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha;\ BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}.$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha;\ AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha}.$$

Рассмотрим ΔABO:

$$BO = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}}{2};\ AO = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha}}{2}.$$

$$a^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha + a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha}{4} -$$

$$-\frac{2\sqrt{\left(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha\right) \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha\right)}}{4} \cos\angle AOB,$$

$$\cos\angle AOB = \frac{a^2 - b^2}{2} : \frac{\sqrt{\left(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha\right) \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha\right)}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha}}.$$

1031. а) $a = 5$; $b = c = 4$.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$;

$25 = 16 + 16 - 2 \cdot 16 \cos \angle A$; $-7 = -32 \cdot \cos \angle A$;

$\cos \angle A = 0{,}2188$; $\angle A = 12°38'$. Так как против большей стороны лежит больший угол, то ΔABC – остроугольный.

б) $a = 17$; $b = 8$; $c = 15$.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \angle A$;

$289 = 64 + 225 - 240 \cdot \cos \angle A$; $0 = 240 \cdot \cos \angle A$; $\angle A = 90°$.

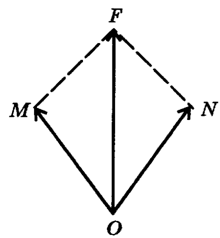
ΔABC – прямоугольный.

в) $a = 9$; $b = 5$; $c = 6$.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$; $81 = 35 + 36 - 60\cos \alpha$; $10 = -60\cos\alpha$; $\cos \alpha \approx -0{,}16666 < 0$,

следовательно $\angle\alpha$ – тупой. ΔABC – тупоугольный.

1032. $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ – силы, приложенные к точке O. $OM = ON$; $\angle MON = 72°$.



$\overrightarrow{OF}$ – равнодействующая этих сил.

Получаем четырехугольник $OMFN$, где OF – диагональ. Но $OMFN$ – ромб, поэтому ΔOMF – равнобедренный. $\angle MOF = 36°$; $\angle OMF = 108°$.

Найдем OF по теореме косинусов.

$OF^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos OAF$ или

$120^2 = 2 \cdot OM^2 - 2ON^2 \cdot \cos 108°$ или

$120^2 = 2 \cdot OM^2 (1 + \cos 72°)$, тогда

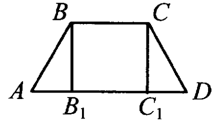
$$OM^2 = \frac{120^2}{2 \cdot (1 + 0{,}3090)} \approx 5500; \ OM \approx 74{,}2 \text{ кг}.$$

1033. Решение приведено в учебнике.

1034. <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – трапеция,

$AB = BC = CD$;

$AD = 10$ см; $\angle A = 70°$. <u>**Найти:**</u> P_{ABCD}.



<u>**Решение.**</u>

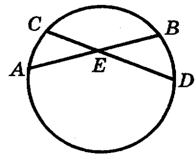
Пусть $AB = x$, тогда $AB_1 = C_1D = \dfrac{10 - x}{2}$, получим в ΔABB_1:

$AB_1 = AB \cdot \cos 70°$; $5 - \dfrac{x}{2} \approx x \cdot 0{,}342$; $5 = x \cdot 0{,}842$; $x = 5{,}94$ см.

$AB = BC = CD \approx 6$ см.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD \approx 6 + 6 + 6 + 10 = 28$ см.

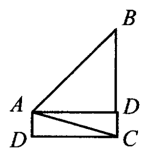
1035. $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (теорема о хордах).
Пусть $AE = x$, тогда $EB = 13 - x$.
Получаем: $x\,(13 - x) = 9 \cdot 4$ или $x^2 - 13x + 36 = 0$. Корни этого квадратного уравнения: $x_1 = 9$ и $x_2 = 4$.



1) Рассмотрим случай, когда $BE = 4$ см.
По теореме косинусов из ΔBED: $BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2 \cdot BE \cdot ED \cdot \cos\angle BED$, откуда $\cos\angle BED = \dfrac{48-16-16}{32} = \dfrac{1}{2}$ и $\angle BED = 60°$.

2) В случае, если $BE = 9$ см, аналогично:
$\cos\angle BED = \dfrac{48-81-16}{72} = \dfrac{49}{72}$ и $\angle BED = 47°$.

1036. __Дано:__ $\angle BAD = 45°$, $\angle CAD = 10°$, $DC = 50$ м.
__**Найти:**__ BC.
__**Решение.**__

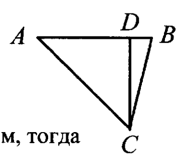


В ΔABD: $\angle A = 45°$, $\angle D = 90°$, т.е. $AD = DB = 50$ м.

В ΔADC: $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{DC}{AD}$, т.е. $DC = AD \operatorname{tg}\angle A$;

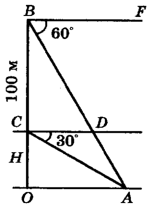
$DC \approx 50 \cdot 0{,}1763 \approx 8{,}82$; $BC \approx 50 + 8{,}82 = 58{,}82$ м.

1037. __Дано:__ $AB = 70$ м; $\angle CAB = 12°30'$; $\angle ABC = 72°42'$; $CD \perp AB$. __**Найти:**__ CD.
__**Решение.**__



В ΔADC: $CD = AD \cdot \operatorname{tg} 12°30'$.
В ΔBDC: $CD = BD \cdot \operatorname{tg} 72°42'$. Пусть $AD = x$ м, тогда $BD = 70 - x$ и $x \cdot \operatorname{tg} 12°30' = (70 - x) \cdot \operatorname{tg} 72°42'$;
$x \cdot 0{,}2217 \approx (70 - x) \cdot 3{,}21$. $3{,}4327x \approx 224{,}77$; $x \approx 65{,}48$.
$AD = 65{,}48$ м; $CD = 65{,}48 \cdot 0{,}2217 \approx 14{,}52$ м.

1038. По условию $BC = 100$ м, $\angle BCD = \angle FBC = \angle COA = 90^\circ$, $\angle FBD = 60^\circ$, $\angle DCA = 30^\circ$. Рассмотрим ΔABO: $\angle BAO = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$. Рассмотрим ΔABC: $\angle BCA = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, $\angle BAC = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$. ΔABC – равнобедренный, т.е. $BC = AC = 100$ м. Рассмотрим ΔCOA: $\angle ACO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,



$\angle CAO = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$. Значит, $CO = \dfrac{1}{2}AC = 50$ м и

$CO = H = 50$ м.

§ 3 Скалярное произведение векторов

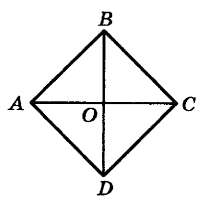
1039. **а)** $\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) = 45^\circ$; **б)** $\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{DA}\right) = 90^\circ$;

в) $\left(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}\right) = 90^\circ$; **г)** $\left(\overrightarrow{AO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OB}\right) = 90^\circ$; **д)** $\left(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OC}\right) = 180^\circ$;

е) $\left(\overrightarrow{AC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BD}\right) = 90^\circ$; **ж)** $\left(\overrightarrow{AD}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{DB}\right) = 135^\circ$; **з)** $\left(\overrightarrow{AO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OC}\right) = 0^\circ$.

1040. $BD = AD = AB = BC = CD$ (по условию). Рассмотрим ΔABD и ΔBCD. Они равносторонние. Значит, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$.

$\angle ADC = \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 120^\circ$.



а) $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \angle BAD = 60^\circ$;

б) $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}\right) = 120^\circ$; **в)** $\angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}\right) = 120^\circ$;

г) $\angle\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \angle COD = 90^\circ$ $(AC \perp BD)$;

д) $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = 0^\circ$, т.к. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$;

е) $\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}\right) = 180°$, т.к. $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

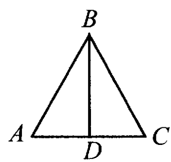
1041. $\left|\vec{a}\right| = 2$; $\left|\vec{b}\right| = 3$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

а) $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 45°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 45° = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

б) $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 90°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 90° = 0$.

в) $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 135°$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 135° = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$.

1042. а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60° = \frac{a^2}{2}$;

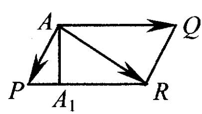


б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a \cdot \cos 120° = -\frac{a^2}{2}$;

в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \cos 90° = 0$;

г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos 0° = a^2$.

1043. ΔPAA_1: $\angle A_1 = 90°$; $\angle A = 30°$; $PA_1 = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.



$$\left.\begin{aligned} AA_1 &= \sqrt{AP^2 - PA_1^2} \\ AA_1 &= \sqrt{AR^2 - A_1R^2} \end{aligned}\right\}, \text{ отсюда}$$

$\sqrt{AP^2 - PA_1^2} = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}$;

$8^2 - 4^2 = AR^2 - 11^2$; $AR^2 = 8^2 + 11^2 - 4^2 = 169$; $AR = 13$; $\left|\vec{R}\right| = 13$.

1044. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = \frac{1}{2} - 3 = -2{,}5$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -5\cdot 6 + 6\cdot 5 = -30 + 30 = 0$;

в) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1{,}5\cdot 4 + 2\cdot(-0{,}5) = 6 - 1 = 5$.

1045. $\vec{a}\cdot\vec{b} = x\cdot(-y) + y\cdot x = -xy + xy = 0$. Значит $\vec{a}\perp\vec{b}$, ч.т.д.

1046. $\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\left(\vec{i}-\vec{j}\right) = \vec{i}^2 - \vec{i}\,\vec{j} - \vec{j}^2 = \vec{i}^2 - \vec{j}^2 = 1 - 1 = 0$, значит

$\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\perp\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$, ч.т.д.

1047. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые.

Они перпендикулярны, если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4x - 5\cdot 6 = 0$; $4x = 30$; $x = 7{,}5$. Данные векторы перпендикулярны, если $x = 7{,}5$.

б) $\vec{a}\cdot\vec{b} = x\cdot 3 - 2 = 0$; $x = \dfrac{2}{3}$.

в) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot 5 + (-3)\cdot x = 0$; $x = 0$.

1048. $AB = \sqrt{(2+1)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$;

$BC = \sqrt{(3+1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$;

$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$.

По теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$;

$32 = 50 + 18 - 60\cos\angle A$; $\cos\angle A = \dfrac{36}{60} = \dfrac{3}{5}$;

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA\cdot BC\cdot\cos\angle B$;

$50 = 32 + 18 - 48\cdot\cos\angle B$ $\cos\angle B = \dfrac{0}{48} = 0$.

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA\cdot CB\cos\angle C$;

$18 = 50 + 32\cdot 80\cos\angle C$; $\cos\angle C = \dfrac{64}{80} = \dfrac{4}{5}$.

1049. $AB = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$;

$$BC=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+12}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2};$$

$$AC=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

По теореме косинусов: $AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos\angle C$;

$16=\frac{49}{4}+\frac{9}{4}-2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}\cos\angle C;\ \frac{6}{4}=-\frac{42}{4}\cos\angle C;\ \cos\angle C=-\frac{1}{7}\approx-0{,}1429<0,$

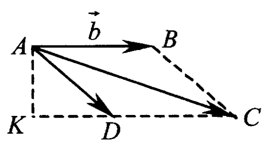
т.е. $\angle C$ – тупой, $\angle C \approx 180° - 81°47' = 98°13'$.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$;

$\frac{49}{4}=16+\frac{9}{4}-2\cdot 4\cdot\frac{3}{2}\angle A;\ \cos\angle A=\frac{1}{2};\ \angle A=60°.$

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) \approx 180° - (60° + 98°13') = 21°47'$.

1050. 1) ΔADK и ΔACK – прямоугольные; т.к. $\angle KAD = 30°$,



$KD=\frac{1}{2}AD=2{,}5$; значит

$KC = KD + DC = 2{,}5 + 8 = 10{,}5$, т.к.

$DC=\left|\vec{b}\right|$.

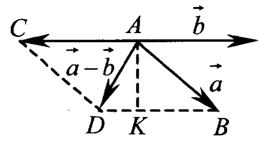
$$\begin{cases} AK=\sqrt{AD^2-KD^2} \\ AK=\sqrt{AC^2-CK^2} \end{cases} \Rightarrow AD^2-KD^2=AC^2-KC^2;$$

$25 - 6{,}25 = AC^2 - 110{,}25$; $AC^2 = 110{,}25 + 25 - 6{,}25$; $AC^2 = 129$;

$AC=\sqrt{129}$, т.е. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}$.

2) $\angle BAK = 30°$, значит

$KB=\frac{1}{2}AB=2{,}5;\ DK=5{,}5.$



$$\begin{cases} AK=\sqrt{AB^2-BK^2} \\ AK=\sqrt{AD^2-DK^2} \end{cases} \Rightarrow$$

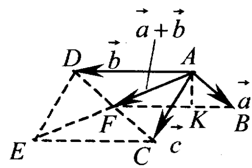
$\Rightarrow AB^2 - BK^2 = AD^2 - DK^2$; $AD^2 = AB^2 - BK^2 + DK^2$;

$AD^2 = 25 - 6{,}25 + 30{,}25 = 49$. Значит $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 7$.

1051. ΔABK и ΔAFK – прямоугольные;

т.к. $\angle BAK = 30°$,

$BK = \frac{1}{2}AB$; $BK = \frac{1}{2}$; $FK = 1\frac{1}{2}$.



$$\begin{cases} AK = \sqrt{AB^2 - KB^2} \\ AK = \sqrt{AF^2 - FK^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$AB^2 - KB^2 = AF^2 - FK^2$. $1 - \frac{1}{4} = AF^2 - \frac{9}{4}$; $AF = 3$; $AF = \sqrt{3}$; $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{3}$.

Т.к. $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, $\left|\overrightarrow{AE}\right|$ – биссектриса, то $\angle\left(\vec{c}; \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right) = 30°$.

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \cos 30° = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

1052. $\vec{p} \cdot \vec{g} = \left(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right)\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 - \vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} - \vec{c}^2 =$

$= \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 - \vec{c}^2 = 25 - 16 + 4 = 13$.

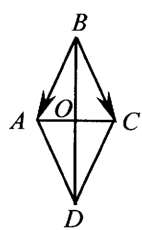
1053. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(3\vec{p} - 2\vec{q}\right)\left(\vec{p} + 4\vec{q}\right) = 3\vec{p}^2 + 12\vec{p}\vec{q} - 2\vec{p}\vec{q} - 8\vec{q}^2 = 3 - 8 = -5$.

1054. Решение приведено в учебнике.

1055. Решение приведено в учебнике.

1056. __Дано:__ $ABCD$ – ромб. __Доказать:__ $AC \perp BD$.

__Доказательство.__



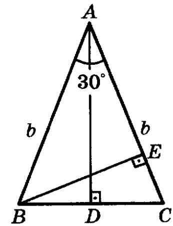
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2$.

$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = a$, значит $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 - a^2 = 0$,

т.е. $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, ч.т.д.

Дополнительные задачи



1057. По теореме косинусов:

$$BC^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos 30° = \left(b\sqrt{-\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$BC = b\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим ΔABE: $BE \perp AC$, $\angle A = 30°$ (по условию), тогда $BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b$. По теореме Пифагора: $AE^2 = AB^2 - BE^2 = b^2 - b^2 = b^2$;

$$AE = \frac{b}{2}\sqrt{3}.\ EC = AC - AE = b - \frac{b}{2}\sqrt{3} = (2-\sqrt{3}).$$

Рассмотрим ΔABD: По теореме Пифагора получаем:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2,\ BD = \frac{1}{2}BC = \frac{b\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ и

$$AD^2 = b^2 - \frac{b^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4} = \frac{b^2}{4}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right),$$ тогда: $AD = \frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1058. а) $\angle A = 180° - 72° - 44° = 64°$.

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin 72°} = \frac{4{,}125}{\sin 64°}$; $AB \approx \frac{4{,}125 \cdot 0{,}9511}{0{,}8988} \approx 4{,}365$м;

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B.\ S_{ABC} \approx \frac{1}{2}\cdot 4{,}125 \cdot 4{,}365 \cdot \sin 44° \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\cdot 4{,}125 \cdot 4{,}365 \cdot 0{,}6947 \approx 6{,}254\ \text{м}^2.$$

б) $\angle B = 180° - 32° - 120° = 28°$.

По теореме синусов:

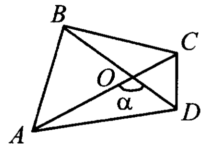
$$\frac{AB}{\sin 120°} = \frac{BC}{\sin 32°};\ AB \approx \frac{410 \cdot 0{,}866}{0{,}5299} \approx 9701\ \text{м};$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B.$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4100 \cdot 6701 \cdot \sin 28° \approx \frac{1}{2} \cdot 4100 \cdot 6701 \cdot 0{,}4695 \approx$

$\approx 6\,449\,072$ м^2.

1059. **<u>Дано:</u>** $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.



Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$.

<u>Доказательство.</u>

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$;

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AO \cdot \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC \cdot \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot CO \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot DO \cdot AO \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(AO \cdot \sin\alpha + OC \cdot \sin\alpha)(BO + DO) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \sin\alpha \cdot (AO + OC) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \cdot \sin\alpha.$$

1060. а) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 75° = 105°$.

$$\frac{8}{\sin 105°} = \frac{BC}{\sin 30°};\ BC \approx \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}9659} \approx 4{,}14 \text{ см};$$

$$\frac{8}{\sin 105°} = \frac{AC}{\sin 45°};\ AC \approx \frac{8 \cdot 0{,}7071}{0{,}9659} \approx 5{,}86 \text{ см}.$$

б) $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - 105° = 75°$.

$$\frac{5}{\sin 65°} = \frac{BC}{\sin 75°};\ BC \approx \frac{5 \cdot 0{,}9659}{0{,}8660} \approx 5{,}58 \text{ см};$$

$$\frac{5}{\sin 60°} = \frac{AC}{\sin 45°};\ AC \approx \frac{5 \cdot 0{,}9659}{0{,}8660} \approx 4{,}08 \text{ см}.$$

в) $\frac{3{,}3}{\sin 48°30'} = \frac{AC}{\sin\angle C};\ \sin\angle C \approx \frac{3 \cdot 0{,}749}{3{,}3} \approx 0{,}6809,\ \angle C \approx 42°55'$;

$\angle B \approx 180° - (48°30' + 42°55') = 88°35'$.

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B};\ \frac{3{,}3}{\sin 48°30'}=\frac{AC}{\sin 88°35'};\ AC\approx\frac{3{,}3\cdot 0{,}9997}{0{,}749}\approx 4{,}40\text{ см.}$$

г) $\dfrac{10{,}4}{\sin 62°48'}=\dfrac{5{,}2}{\sin\angle A};\ \sin\angle A\approx\dfrac{5{,}2\cdot 0{,}8894}{10{,}4}\approx 0{,}4447,\ \angle A\approx 26°24'$;

$\angle C\approx 180° - (62°48' + 26°24') = 90°48'$.

$$\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle C};\ \frac{10{,}4}{\sin 62°48'}=\frac{AB}{\sin 90°48'};\ AB\approx\frac{10{,}4\cdot 0{,}9997}{0{,}8894}\approx 11{,}69\text{ см.}$$

1061. а) По теореме косинусов:

$BC^2 = AB^2 = AC^2 - AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$.

$BC^2 = 25 + 56{,}25 - 75\cdot\cos 135° \approx 81{,}25 + 75\cdot 0{,}7071 \approx 134{,}2825$;

$BC \approx 11{,}59$ см;

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$;

$56{,}25 = 25 + 134{,}28 - 115{,}9\cdot\cos\angle B$;

$\cos\angle B \approx \dfrac{103{,}03}{115{,}9} = 0{,}88895;\ \angle B\approx 27°15'$;

$\angle C = 180\cdot - \angle A + \angle B) \approx 180°(135° + 27°15') = 17°45'$.

б) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B = 8 + 9 - 2\cdot\ 6\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5$;

$AC = \sqrt{5}$ дм;

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\angle C;\ 8 = 5 + 9 - 2\sqrt{5}\ \cdot 3\cdot\cos\angle C$;

$\cos\angle C = \dfrac{6}{6\sqrt{5}} \approx 0{,}4472;\ \angle C\approx 63°26'$;

$\angle A = 180°\ (\angle B + \angle C) = 180° - (45° + 63°26') = 71°34'$.

в) $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos 150° =$

$= 36 + \dfrac{3}{16} + 2\cdot\ 6\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ \cdot\cos 30°$;

$AB^2 = \dfrac{651}{16} = 40{,}6875;\ AB\approx 6{,}4$ дм.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$;

$36 = 40{,}6875 + \dfrac{3}{16} - 2\cdot 6{,}4\cdot\ 6{,}4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ \cdot\cos\angle B$;

$4{,}875 = 5{,}5426 \cdot \cos\angle B$; $\cos\angle B \approx 0{,}8796$; $\angle B \approx 28°24'$;

$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) \approx 180 - (28°24' + 150°) = 1°36'$.

1062. Воспользуемся теоремой косинусов.

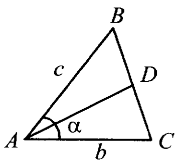
$$\cos D = \frac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2 \cdot DE \cdot DF} = \frac{4{,}5^2 + 7^2 - 9{,}9^2}{2 \cdot 4{,}5 \cdot 7} = -\frac{28{,}76}{63} = -0{,}4565.$$

$\angle D = 180° - 62°50' = 117°10'$.

$$\cos E = \frac{DE^2 + EF^2 - DF^2}{2 \cdot DE \cdot EF} = \frac{69{,}26}{89{,}1} = 0{,}7773,\ \angle E = 39°.$$

$\angle F = 180° - (\angle D + \angle E) = 180° - 117°10' - 39° = 23°50'$.

1063. $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$.

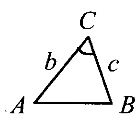


$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}c \cdot AD\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}b \cdot AD\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$ab\sin\alpha = AD \cdot \left(c\sin\frac{\alpha}{2} + b\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$AD = \frac{ab\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}(c+b)} = \frac{2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}(c+b)} = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{c+b}.$$

1064. По теореме косинусов



$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos\angle C$;

$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}.$$

1065. Найдем длины сторон треугольника.

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29};$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

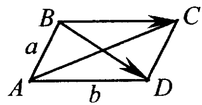
$$BC = \sqrt{(2-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}.$$

Отсюда $\angle C$, лежащий против стороны AB, тупой.

$$\cos C = \frac{BC^2 + AB^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{17 + 2 - 29}{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{34}}{34}.$$

$\cos C < 0$, значит, $\angle C$ – тупой, что и требовалось доказать.

1066. $\vec{a}\{3;-4\}; \left|\vec{a}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.



1067. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{p} - 3\vec{q} = 6\vec{p} - \vec{q}$;

$|AC| = \sqrt{(6p)^2 + q^2 - 12pq\cos 45^\circ} =$

$= \sqrt{288 + 9 - 12 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{225} = 15.$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} - 5 - 2\vec{q} = -4\vec{p} - 5\vec{q}$.

$|BD| = \sqrt{16p^2 + 20q^2 - 40pq\cos 45^\circ} = \sqrt{593} \approx 23{,}4$.

1068. $\vec{p} \cdot \vec{q} = \left(x\vec{a} + 17\vec{b}\right)\left(3\vec{a} - \vec{b}\right) = 3x\vec{a}^2 - x\vec{a}\vec{b} + 51\vec{a}\vec{b} - 17\vec{b}^2 =$

$= 12x - 10x \cdot \cos 120^\circ + 51 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ - 17 \cdot 25 =$

$= 12x + 5x - 255 - 425 = 17x - 680.$

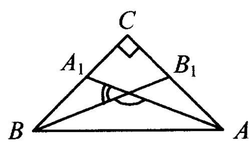
$\vec{p} \perp \vec{q}$, значит $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$; $17x - 680 = 0$; $x = 40$.

1069. <u>**Дано:**</u> ΔABC; $\angle C = 90^\circ$; $AC = BC$;

AA_1, BB_1 – медианы.

<u>**Найти:**</u> $\angle AOB$, $\angle BOA_1$.

<u>**Решение.**</u>



Пусть $BC = CA = 2a$. Из ΔBCB_1:

$BB_1 = \sqrt{BC^2 + CB_1^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$, откуда $AA_1 = a\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA}$;

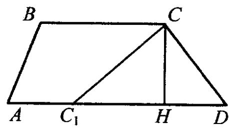
$\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \left(\overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA}\right) = \underbrace{\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1}}_{0} - \overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA_1} + \underbrace{\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1}}_{0} =$

$= -2a^2 - 2a^2 = -4a^2.$

$$\cos\angle AOB = \frac{\left|\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right|}{\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{AA_1}} = \frac{4a^2}{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$\angle AOB \approx 36^\circ 51'$; $\angle BOA_1 \approx 180^\circ - 36^\circ 51' = 109^\circ 09'$.

1070. $\sin 60^\circ = \dfrac{BH}{4\sqrt{7}}$; $BH = 4\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{7} = 2\sqrt{21}$.



$S = \dfrac{16+8}{2}\cdot 2\sqrt{21} = 24\sqrt{21}$; $\dfrac{S}{2} - 12\sqrt{21}$.

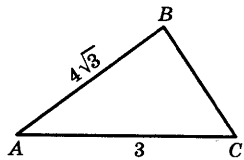
Т. C_1 лежит на стороне AD, т.к.

$$S_{ACO} = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 4\sqrt{7}\sin 60^\circ = 32\frac{\sqrt{21}}{2} = 16\sqrt{21} > 12\sqrt{21},$$

т.е. $AC_1 = 16 - 12 = 4$. Из ΔCC_1D:

$$CC_1 = \sqrt{12\sqrt{2} + \left(4\sqrt{7}\right)^2 - 2\cdot 12\cdot 4\sqrt{7}\cdot\cos 60^\circ} = 4\sqrt{16 - 3\sqrt{7}}.$$

1071. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A$ или



$3\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 3\cdot\sin\angle A$, тогда

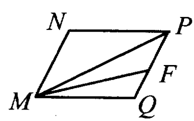
$\sin\angle A = \dfrac{1}{2}$, $\angle A = 30^\circ$,

$\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов можно найти BC:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle A} = \sqrt{21}$ По задаче 1033:

$$R = \frac{BC}{2\cdot\sin\angle A} = \frac{\sqrt{21}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{21}.$$

1072. $\angle M = 4\alpha$, значит по свойству ромба $\angle FMQ = \angle FMP = \alpha$; $\angle Q = 180^\circ - 4\alpha$; $\angle QMP = 2\alpha$.



Из ΔMFQ:

$$\frac{FQ}{\sin\angle FMQ} = \frac{MF}{\sin\angle Q};\ \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{MF}{\sin 4\alpha};\ MF = \frac{a\cdot\sin 4\alpha}{\sin\alpha}.$$

Из ΔMPF:

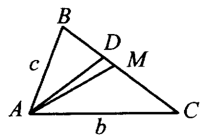
$$\frac{MF}{\sin\angle QMP}=\frac{FP}{\sin\angle PMF};\ FP=\frac{a\cdot\sin 4\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}=2a\cdot\cos 2\alpha;$$

$$PQ=a(2\cos 2\alpha+1);\ S=PQ^2\sin 4\alpha=a^2(4\cos^2 2\alpha+1+4\cos 2\alpha)\sin 4\alpha.$$

1073. Решение приведено в учебнике.

1074. Решение приведено в учебнике.

1075. а) 1) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A=$



$=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\angle A;$

с другой стороны, $S_{ABC}=S_{ABD}+$

$+S_{ADC}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\angle A}{2}+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\frac{\angle A}{2}=$

$=\frac{1}{2}AD\cdot(b+c)\cdot\sin\frac{\angle A}{2}.$

2) $\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}AD\cdot(b+c)\cdot\sin\frac{\angle A}{2};\ b\cdot c\cdot\sin\angle A=$

$=AD\cdot(b+c)\cdot\sin\frac{\angle A}{2}.$

$$AD=\frac{2bc\cos\frac{\angle A}{2}}{b+c}.$$

3) $\sqrt{\frac{1+\cos\angle A}{2}}=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\angle A}{2}+\sin^2\frac{\angle A}{2}+\cos^2\frac{\angle A}{2}-\sin^2\frac{\angle A}{2}}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\angle A}{2}}{2}}=\sqrt{\cos^2\frac{\angle A}{2}}=\cos\frac{\angle A}{2}.$

4) Значит $AD=\frac{2bc\sqrt{\frac{1+\cos\angle A}{2}}}{b+c}$, ч.т.д.

б) По теореме косинусов

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A} = \sqrt{c^2 + b^2 - 2bc\cos\angle A}$;

$AM = \frac{1}{2}BC = \sqrt{c^2 + b^2 - 2bc\cos\angle A}$, ч.т.д.

1076. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2$.

$\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, значит $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$; $\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2 = 0$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$.

Т.к. $ABCD$ – параллелограмм, то $BC = BA = AD = CD$, значит $ABCD$ – ромб, ч.т.д.

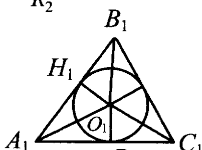
1077. а) Воспользуемся задачей 1033: $\frac{A_1B_1}{\sin\angle C_1} = 2R_1$; $\frac{A_2B_2}{\sin\angle C_2} = 2R_2$.

Разделим первое выражение на второе:

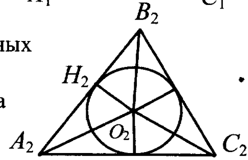
$\frac{A_1B_1}{\sin\angle C_1} : \frac{A_2B_2}{\sin\angle C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$; $\frac{A_1B_1 \cdot \sin\angle C_1}{A_2B_2 \cdot \sin\angle C_2} = \frac{R_1}{R_2}$;

т.к. треугольники подобны, $\angle C = \angle C_1$.

Значит $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{R}{R_1} = k$, ч.т.д.



б) $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$, значит $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$.



По свойству касательных, проведенных из одной точки, в $\Delta A_1B_1C_1$ O_1A_1 – биссектриса $\angle A_1$, O_1B_1 – биссектриса $\angle B_1$, в $\Delta A_2B_2C_2$ O_2A_2 – биссектриса $\angle A_2$, O_2B_2 – биссектриса $\angle B_2$.

Значит $\angle O_1A_1B_1 = \angle O_2A_2B_2$ и $\angle O_1B_1A_1 = \angle O_2B_2A_2$, следовательно $\Delta A_1O_1B_1 \sim \Delta A_2O_2B_2$.

Значит $\frac{O_1H_1}{O_2H_2} = \frac{r_1}{r_2} = k$, ч.т.д.

Глава XII.
Длина окружности и площадь круга

§ 1 Правильные многоугольники

1078. **а)** Верно (по определению выпуклого многоугольника);
б) неверно (т.к. правильным является только тот многоугольник, углы и стороны которого равны).

1079. **а)** неверно (т.к. углы должны быть тоже равны);
б) верно (т.к. если все углы треугольника равны, то и стороны равны);
в) верно (т.к. из равенства сторон треугольника вытекает равенство углов);
г) неверно (например ромб).

1080. Четырехугольник называется правильным, если все его стороны и все углы равны, а это только квадрат.

1081. $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. **а)** $n = 3$; $\alpha = \frac{3-2}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$;

б) $n = 6$; $\alpha = \frac{6-2}{6} \cdot 180^\circ = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$;

в) $n = 5$; $\alpha = \frac{5-2}{5} \cdot 180^\circ = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$;

г) $n = 10$; $\alpha = \frac{10-2}{10} \cdot 180^\circ = 8 \cdot 18^\circ = 144^\circ$;

д) $n = 18$; $\alpha = \frac{18-2}{18} \cdot 180^\circ = 16 \cdot 10^\circ = 160^\circ$.

1082. Сумма углов правильного n-угольника $n \cdot \alpha = (n-2) \cdot 180^\circ$.
Сумма внешних углов правильного n-угольника:
$n \cdot (180^\circ - \alpha) = (n-2) \cdot 180^\circ$.
$n \cdot 180^\circ - n \cdot \alpha = n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ$; $-n \cdot \alpha = -2 \cdot 180^\circ$. $n \cdot \alpha = 360^\circ$.

1083. $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$; $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$. **а)** $\alpha = 60^\circ$; $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 60^\circ} = 3$;

б) $\alpha = 90^\circ$; $n = \frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$; **в)** $\alpha = 135^\circ$; $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - 135^\circ} = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$;

г) $\alpha = 150°$; $n = \dfrac{360°}{180° - 150°} = \dfrac{360°}{30°} = 12$.

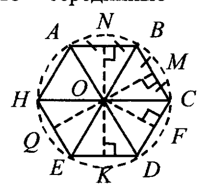
1084. Из условия ясно, что каждая сторона правильного многоугольника является хордой окружности. Все стороны многоугольника равны, значит, равны и стягиваемые ими дуги. Предположим, что n – число сторон многоугольника, тогда

$$n = \frac{360°}{\alpha}.$$

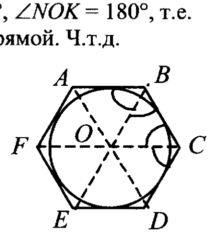
а) $n = \dfrac{360°}{60°} = 6$; **б)** $n = \dfrac{360°}{30°} = 12$; **в)** $n = \dfrac{360°}{90°} = 4$;

г) $n = \dfrac{360°}{36°} = 10$; **д)** $n = \dfrac{360°}{18°} = 20$; **е)** $n = \dfrac{360°}{72°} = 5$.

1085. **Дано:** $ABCDEF$ – правильный; NO, MO, KO – серединные перпендикуляры к сторонам. **Доказать:** $NO \cap OM$; ON, OK – совпадают. Так как $ABCDEF$ – правильный 6-угольник, то каждый угол равен 120°, следовательно $\angle NOM = \angle MOF = ... = \angle KOQ = 60°$. Так как серединные перпендикуляры к сторонам правильного 6-угольника проходят через центр окружности, вписанной в него, то угол между ними: $\angle NOM = 60°$, $\angle NOF = 120°$, $\angle NOK = 180°$, т.е. они пересекаются или лежат на одной прямой. Ч.т.д.

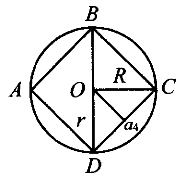


1086. **Дано:** $ABCDEF$ – правильный 6-угольник. **Доказать:** биссектрисы углов пересекаются или совпадают.
Так как $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120°$, то $\dfrac{1}{2}\angle A = \dfrac{1}{2}\angle B = ... = \dfrac{1}{2}\angle F = 60°$.



Так как биссектрисы пересекаются в центре вписанной окружности $\angle COD = 60°$; $\angle COE = 120°$; $\angle COF = 180°$, то биссектрисы или пересекаются или лежат на одной прямой.

1087. $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$; $r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$; $S = \frac{1}{2}P_r$.



№	R	r	a_4	P	S
1	$3\sqrt{2}$	3	6	24	36
2	$3\sqrt{2}$	2		16	16
3	4	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$16\sqrt{2}$	32
4	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	3,5	7	28	49
5	$2\sqrt{2}$	2	4	16	16

1088. $a_3 = R\sqrt{3}$; $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{1}{2}R$; $P = 3 \cdot a_3$; $S\,\frac{a_3^2\sqrt{3}}{4}$.

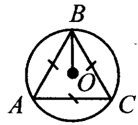
№	R	r	a_4	P	S
1	3	1,5	$3\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	$\frac{27\sqrt{3}}{4}$
2	$\frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$	$2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$	$6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$	10
3	4	2	$4\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$
4	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	5	15	$\frac{25\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	6	$\sqrt{3}$

1089. a – сторона треугольника, R – радиус описанной окружности, x – сторона квадрата, вписанного в окружность.

$$a=\frac{P}{3}=6\text{ см};\ R=\frac{Q}{2\cdot\sin\frac{180^\circ}{3}}=\frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}\text{ см};$$

$$x=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{4}=2\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}\text{ см}.$$

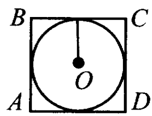
1090. **<u>Дано:</u>** ΔABC; $AB=BC=AC=3$ см. **<u>Найти:</u>** d.



<u>Решение.</u>

$$a_3=R\sqrt{3};\ R=\frac{Q_3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3};\ d=2R=2\sqrt{3}\text{ см}.$$

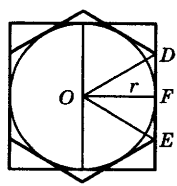
1091. **<u>Дано:</u>** $ABCD$ – квадрат, описанный около Окр. (O; r). $AB=6$ см. **<u>Найти:</u>** d.



<u>Решение.</u> $AB=2r=d=6$ см.

<u>Ответ:</u> 6 см.

1092. r – радиус вписанной окружности, DE – сторона шестиугольника, $OF=r$;

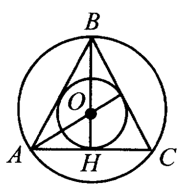


$DE=\frac{P}{6}=\frac{34}{6}=8$ см. ΔDOF – прямоугольный; $DF=4$ см; $\angle DOF=30°$.

$r=\frac{4}{\operatorname{tg}30^\circ}=4\sqrt{3}$ см. Найдем периметр квадрата: $P=4a$, где a – сторона квадрата. $a=2r$;

$P=4\cdot2\cdot4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$ см.

1093. **<u>Дано:</u>** ΔABC – правильный, Окр (O; R) – описанная, Окр (O; r) – вписанная.



<u>Доказать:</u> $R=2r$.

<u>Доказательство.</u>

Так как ΔABC – правильный, то центры вписанной и описанной окружностей совпадают. O – точка пересечения биссектрис, которые в равностороннем треугольнике являются и

медианами; по свойству медиан
$BO : OH = 2 : 1$, а т.к. $BO = R$, $OH = r$, то $R : r = 2 : 1$, $R = 2r$, ч.т.д.

1094. а) $a_4 = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6$ см, $r_4 = 3$ см, $P_4 = 4 \cdot a_4 = 24$ см.

$$S_4 = \frac{1}{2}P\cdot r = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 3 = 36 \text{ см}^2.$$

б) $r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{8}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ см. $S_3 = \dfrac{1}{2}P\cdot r = \dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}$ см^2.

в) $a_6 = R = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\cdot 6}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ см; $P_6 = 6 \cdot a_6 = 36\sqrt{3}$ см.

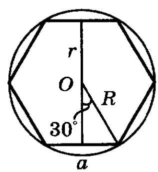
$$S_6 = \frac{1}{2}P\cdot r = \frac{1}{2}\cdot 36\sqrt{3}\cdot 9 = 162\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

г) $a_8 = 2R\sin\dfrac{45^\circ}{2} = 2\dfrac{r}{\cos\dfrac{45^\circ}{2}}\cdot\sin\dfrac{45^\circ}{2} = 2r\cdot\operatorname{tg}\dfrac{45^\circ}{2}$;

$$r = R\cdot\cos\frac{45^\circ}{2};\ R = \frac{r}{\cos\dfrac{45^\circ}{2}};\ \operatorname{tg}22{,}5^\circ \approx 0{,}4142;\ a_8 \approx 2\cdot 5\sqrt{3}\cdot 0{,}4142 \text{см}.$$

$$P_8 = 8 \cdot a_8 = 8 \cdot 7{,}1742 \approx 57{,}3932;\ S_8 \approx \frac{1}{2}57{,}3932\cdot 5\sqrt{3} \approx 248{,}52 \text{ см}^2.$$

1095. a – сторона болта, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности. По условию: $2r = 1{,}5$ см, $r = 0{,}75$ см. Тогда сторона



$$a = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}.$$

$$R = \frac{r}{\cos 30^\circ} = \frac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см. } S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot a\cdot r = \frac{9\sqrt{3}}{8} \text{ см}^2.$$

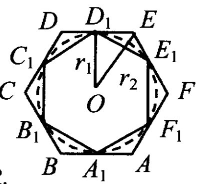
1096. <u>**Дано:**</u> правильные треугольник, квадрат, шестиугольник
$a_3 = a_4 = a_6 = a$. <u>**Найти:**</u> $S_3 : S_4 : S_6$.

Решение.

$$P=3a;\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\ S_3=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S_4=a^2;$$

$$P_6;\ S_6=\frac{1}{2}\cdot 6a\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2};\ S_3:S_4:S_6=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}:a^2:\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}.$$

1097. **Дано:** $ABCDEF$ – описанный правильный 6-угольник; $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – вписанный правильный 6-угольник.
Найти: $S_1 : S_2$



Решение.
$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – вписанный в окружность, значит $A_1B_1 = B_1C_1 = ... = F_1A_1 = R$.

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}=6S_{\Delta A_1OB_1}=6\left[\frac{1}{2}OA_1\cdot OB_1\cdot\sin\angle 60^\circ\right]=3\cdot R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}R}{2}.$$

OA – биссектриса $\angle A_1OF_1 \Rightarrow \angle A_1OA = 30^\circ$; $A_1A = x$, получим $OA = 2x$. По теореме Пифагора: $A_1A^2 + OA_1^2 = OA^2$; $x^2 + R^2 = 4x^2$;

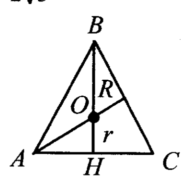
$$3x^2=R^2\Rightarrow x=\frac{R\sqrt{3}}{3};\ AB=\frac{2\sqrt{3}R}{3}.$$

$$S_{ABCDEF}=6S_{\Delta AOB}=6\left[\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle 60^\circ\right]=$$

$$=3\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot R^2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=2\sqrt{3}R^2.$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}:S_{ABCDEF}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}:2\sqrt{3}R^2=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{3}{4}.$$

1098. **Дано:** ΔABC – правильный, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. **Выразить:** **а)** AB, P, S через r; **б)** AB, P, S через R.



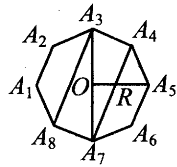
Решение.

а) $AB=R\sqrt{3}; P=3\sqrt{3}R; S=\frac{1}{2}\left(R\sqrt{3}\right)^2\cdot\sin 60^\circ=$

$$=\frac{3R^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

б) $AB=2\sqrt{3}r$; $P=6\sqrt{3}r$; $S=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}r\right)^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{12r^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}r^2$.

1099. Так как в 4-угольнике $A_3A_4A_7A_8$: $A_3A_7 = A_4A_8$, то $A_3A_4A_7A_8$ – прямоугольник.



В ΔA_8OA: $\angle OA_8A_7 = \angle OA_7A_8 = 67°30'$, то $\angle A_7OA_8 = 45°$.

$A_8A_7^2 = A_8O^2 + A_7O^2 - 2A_8O - A_7O \cdot \cos 45°$.

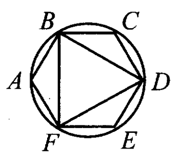
$$A_8A_7^2=R^2+R^2-2R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=R^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

$A_8A_7=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ – длина стороны.

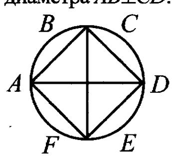
$$S_{A_3A_4A_7A_8}=4\left(\frac{1}{2}R^2\cdot\sin 45^\circ\right)=4\left(\frac{1}{2}R^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=R^2\sqrt{2}.$$

1100. а) Построить Окр(O; R) и разделить ее на 6 равных частей циркулем радиуса R. $ABCDEF$ – искомый.

б) См. рисунок. $ABDF$ – искомый.

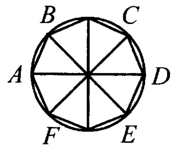


в) построить два взаимно перпендикулярных диаметра $AB\perp CD$. $ABCD$ – искомый.



г) построить два взаимно перпендикулярных диаметра $AB\perp CD$, затем биссектрисы прямых углов EF и KQ.

$AKCFBQDE$ – искомый.



§ 2 Длина окружности и площадь круга

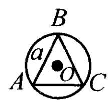
1101. $C = 2\pi R$; $R = \dfrac{C}{2\pi}$.

C	25,12	18,84	82	18π	4,40	6,28	637,42	14,65	$2\sqrt{3}$
R	4	3	13,06	9	0,7	1	101,5	$2\frac{1}{3}$	0,45

1102. **а)** увеличится в 3 раза; **б)** уменьшится в 2 раза;
в) увеличится в k раз; **г)** уменьшится в k раз.

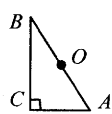
1103. **а)** увеличится в k раз; **б)** уменьшится в k раз.

1104. **а)** **Дано:** ΔABC – вписан в Окр(O; R);
$AB = BC = AC = a$.
Найти: C.
Решение.



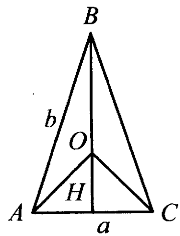
$$AB = R\sqrt{3};\ R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ C = 2\pi R = 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}.$$

б) **Дано:** ΔABC – вписан в Окр(O; R);
$AC = b$, $BC = a$, $\angle C = 90°$.
Найти: C.
Решение. O – на середине AB;



$$AB = \sqrt{a^2 + b^2};\ R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2};\ C = 2\pi R = \pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

в) __**Дано:**__ ΔABC – вписан в Окр(O; R);
$AB = BC = b$, $AC = a$. __**Найти:**__ C.



__**Решение.**__

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$BH = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(b^2 - a^2\right)}.$$

Пусть $AO = R$, тогда

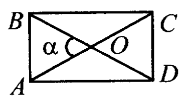
$$HO = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} - R.$$

По теореме Пифагора: $AO^2 = AH^2 + OH^2$.

$$R^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} - R\right)^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\left(4b^2a^2\right) - R\sqrt{4b^2 - a^2} + R^2 + \frac{1}{4}a^2.$$

$$R\sqrt{4b^2 - a^2} = b^2;\ R = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}};\ C = 2\pi R = \frac{2\pi b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

г) __**Дано:**__ $ABCD$ – прямоугольник вписан в Окр(O; R); $AB = a$, $\angle AOB = \alpha$.
__**Найти:**__ C.

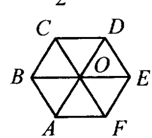


__**Решение.**__

По теореме косинусов: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \angle AOB$;
$a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha)$.

$$R^2 = \frac{a^2}{2\left(1 - \cos\alpha\right)};\ R = \frac{a}{\sqrt{a\left(1 - \cos\alpha\right)}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

д) __**Дано:**__ $ABCDEF$ правильный 6-угольник;
$S = 24\sqrt{3}$ см^2. __**Найти:**__ C.



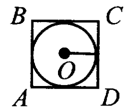
__**Решение.**__

$S = 6 \cdot S_{AOB}$;

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ = \frac{R^2\sqrt{3}}{4};\ 24\sqrt{3} = \frac{6R^2\sqrt{3}}{4}.$$

$6R^2 = 96$, $R = 4$ см. $C = 2\pi R = 24 = 8\pi$.

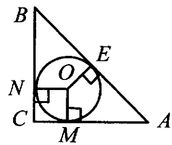
1105. а) **Дано:** $ABCD$ – квадрат, описанный около Окр(O; r); $AB = a$. **Найти:** C.



Решение.

$$r = \frac{a}{2};\ C = 2\pi r = \pi a.$$

б) **Дано:** ΔABC – описан около Окр(O; r); $\angle C = 90°$, $AC = BC$, $AB = c$. **Найти:** C.



Решение.

Т.к. CA и CB – касательные, то $MC = CN = r$.

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,\ 2AC^2 = c^2,\ AC = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

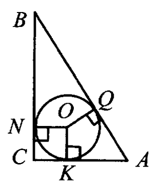
$$AM = BN = \frac{c\sqrt{2}}{2} - r;\ AB = AE + EB.$$

$$c = 2\left(\frac{c\sqrt{2}}{2} - r\right) = c\sqrt{2} - 2r;\ r = \frac{c\left(\sqrt{2}-1\right)}{2};$$

$$C = 2\pi r = 2\pi\frac{c\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = \pi c\left(\sqrt{2}-1\right).$$

в) **Дано:** ΔABC – описанный около Окр(O; r), $\angle C = 90°$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$.

Найти: C. **Решение.**



$BC = c \cdot \sin\alpha$, $AC = c \cdot \cos\alpha$. Так как CB и CA – касательные, то $CK = CN = r$,

$BN = BC - r$,

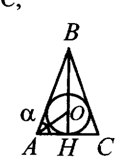
$AK = c \cdot \cos\alpha - r$, $AB = c$,

$c \cdot \sin\alpha - r + c + c \cdot \cos\alpha - r = c$;

$$c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = 2r,\ r = \frac{c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{2}.$$

г) **Дано:** ΔABC – описан около Окр(O; r), $AB = BC$, $\angle A = \alpha$, $BH \perp AC$, $BH = h$. **Найти:** C.

Решение.



$AH = \dfrac{BH}{\operatorname{tg}\angle A} = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$. Пусть $HO = r$, тогда

$$r = AH \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}; C = 2\pi r = \frac{2\pi h \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

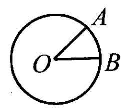
1106. d – диаметр колеса, $d = 2R$, $C = 2\pi R = \pi d$. По условию: $C \cdot 300 = 1413$; $C = 4{,}71$ м. $d = \frac{C}{\pi} = \frac{4{,}71}{3{,}14} = 1{,}5$ м.

1107. 1 м $= \frac{1}{40\,000\,000}$, значит длина экватора 40 000 км.

$C = 2\pi R = 40\,000.\ 2R = \frac{40\,000}{\pi} \approx 12\,739.$

1108. $R = 6370 + 320 = 6690$ км. $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 6690 \approx 42013{,}2$ км.

1109. **Дано:** Окр(O; 6 см); **а)** $\angle AOB = 30°$, **б)** $\angle AOB = 45°$, **в)** $\angle AOB = 60°$, **г)** $\angle AOB = 90°$. **Найти:** C.



Решение.

$l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha$;

а) $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = \pi$ см; **б)** $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 45}{180} = \frac{3}{2}\pi$ см;

в) $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60}{180} = 2\pi$ см; **г)** $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 90}{180} = 3\pi$ см.

1110. $C = 2\pi R \approx 3{,}14 \cdot 450 = 1413$; $1413 : 47{,}1 = 30$.

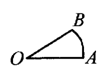
Ответ: 30 зубьев.

1111. $R = \frac{1}{2}d = 29$ см; $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 29 \cdot 117°}{180°} \approx 59{,}189$ см.

1112. α – угол колебания маятника, l – длина дуги, которую описывает маятник, R – длина маятника.

$l = \frac{\pi R \cdot \alpha}{180°}$; $R = \frac{180 \cdot l}{\pi \cdot \alpha} = \frac{180 \cdot 24}{3{,}14 \cdot 38} = 36{,}2$ (см).

1113. $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$; $400 = \frac{\pi \cdot 5000 \cdot \alpha}{180}$; $\alpha = \frac{400 \cdot 180}{\pi \cdot 5000} \approx 4°35'$.



1114. $S = \pi R^2$; $R = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

S	12,56	78,5	9	0,26	49π	9258,26	9,42	6,25
R	2	5	1,69	$\dfrac{2}{7}$	7	54,3	$\sqrt{3}$	1,41

1115. а) Увеличится в k^2 раз. **б)** уменьшится в k^2 раз.

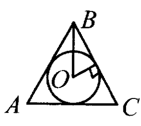
1116. а) $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; $S = \pi R = \dfrac{\pi\left(a^2+b^2\right)}{4}$.

б) $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$; $S = \dfrac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$.

в) c – боковая сторона равнобедренного треугольника.

$$R = \frac{c^2}{\sqrt{4c^2-a^2}};\ c^2 = h^2 + \frac{a^2}{4};\ R = \frac{\left(a^2+4h^2\right)}{8h};\ S = \frac{\pi\left(a^2+4h^2\right)^2}{64h^2}.$$

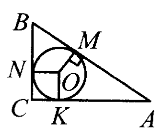
1117. а) <u>**Дано:**</u> ΔABC – описан около круга (O; r);
$AB = BC = AC = a$. <u>**Найти:**</u> $S_{\text{круга}}$.



<u>**Решение.**</u>

$$AB = r\cdot 2\sqrt{3};\ r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6};\ S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{12}.$$

б) <u>**Дано:**</u> ΔABC – описан около круга (O; r),
$\angle C = 90°$, $AC = a$, $\angle A = a$. <u>**Найти:**</u> $S_{\text{круга}}$.



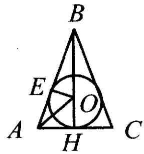
<u>**Решение.**</u>

$AB = \dfrac{a}{\cos\alpha}$; $BC = a\operatorname{tg}\alpha$. Так как CB и CA – касательные, то $NC = KC = r$, т.е.
$BN = BM = a\operatorname{tg}\alpha - r$; $AK = AM = a - r$, получим $AM + MB = AB$.

$$a\operatorname{tg}\alpha - r + a - r = \frac{a}{\cos\alpha};\ 2r = a(\operatorname{tg}\alpha + 1) - \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{a(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{\cos\alpha};$$

$$r = \frac{a(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{2\cos\alpha};\ S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2}{4\cos^2\alpha}.$$

в) <u>**Дано:**</u> ΔABC – описан около круга $(O;\ r)$, $AB = BC = a$, $\angle B = a$. <u>**Найти:**</u> $S_{\text{круга}}$.



<u>**Решение.**</u>

В ΔABC: $\angle B = \dfrac{\alpha}{2}$; $\angle H = 90°$; $AB = a$;

$AH = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, $BH = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

$\Delta ABH \sim \Delta OBE$ (по двум углам), т.е.

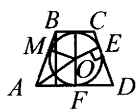
$$\frac{AB}{OB} = \frac{BH}{BE} = \frac{AH}{OE};\ \frac{a}{a\cos\frac{\alpha}{2} - r} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{r},$$

$$ar = \left(a\cos\frac{\alpha}{2} - r\right)\cdot a\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha - ar\sin\frac{\alpha}{2};\ ar\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha;$$

$$r = \frac{a\sin\alpha}{2\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)};\ S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

г) <u>**Дано:**</u> $ABCD$ – трапеция, описана около круга $(O;\ r)$; $AB = CD$, $AD = a$, $\angle A = a$.

<u>**Найти:**</u> $S_{\text{круга}}$.



<u>**Решение.**</u>

Так как AD и AB – касательные, то $AM = AF$ и AO – биссектриса, значит $\angle OAF = \dfrac{\alpha}{2}$.

ΔAOF: $\angle F = 90°$, $\angle A = \dfrac{\alpha}{2}$, $AF = \dfrac{a}{2}$, $R = OF = AF\cdot\operatorname{tg}\angle A$;

$OF = \dfrac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. $S = \pi R^2 = \pi\dfrac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

1118. $S = \pi R^2$; $R = \dfrac{1}{2}D$; $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$; $S = \dfrac{\pi\cdot 6{,}6}{4} = 34{,}2$ (м^2).

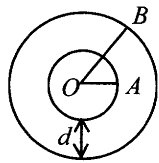
1119. $C = 2\pi r$. Т.к. $2r = d$, то $41 = \pi \cdot d$, $d = \dfrac{41}{\pi} \approx 13{,}02$ м.

$S = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot 6{,}5^2 = 133{,}84$ м^2.

1120. $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 4\pi$ см^2.

1121. **Дано:** круг $(O; R_1)$, круг $(O; R_2)$;

$S_{\text{круга}} = 314$ мм^2, $AB = 18{,}5$ мм. **Найти:** d.



Решение.

$R_2 = \dfrac{1}{2}AB$, $R_2 = 9{,}25$ мм; $S_{кр_1} = \pi R_1$; $\dfrac{314}{\pi} = R_1^2$,

следовательно $R_1 = \sqrt{100} = 10$.

$d = 10 - 9{,}25 = 0{,}75$ мм – слой нужно снять.

1122. r – радиус клумбы, R – радиус клумбы вместе с дорожкой и $R = r + 1 = 4$ (м). $S = \pi R^2 - \pi r^2 = 7\pi$ (м^2), где S – площадь дорожки вокруг клумбы.

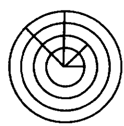
Теперь находим количество песка: $x = (7\pi \cdot 0{,}8) = 17{,}6$ (дм^3).

1123. $S_{\text{кр.}} = \pi r^2$; $S_{\text{кв.}} = 2r^2$.

Тогда получаем: $S_{\text{ост.}} = S_{\text{кр.}} - S_{\text{кв.}} = \pi r^2 - 2r^2 = r^2(\pi - 2)$.

1124. **Дано:** $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 4$.

Найти: S_1, $S_{к_1}, S_{к_2}, S_{к_3}$.



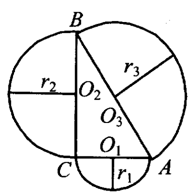
Решение.

$S_1 = \pi$; $S_2 = 4\pi$, $S_3 = 9\pi$; $S_4 = 16\pi$;

$S_{к_1} = S_2 - S_1 = 3\pi$; $S_{к_2} = S_3 - S_2 = 5\pi$; $S_{к_3} = S_4 - S_3 = 7\pi$.

1125. **Дано:** ΔABC, $\angle C = 90°$; AC – диаметр Окр$(O_1; r_1)$; BC – диаметр Окр$(O_2; r_2)$; AB – диаметр Окр$(O_2; r_2)$.

Доказать: $S_3 = S_1 + S_2$.



Доказательство.

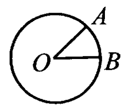
$S = \dfrac{1}{2}\pi r_3^2$; $S_2 = \dfrac{1}{2}\pi r_2^2$; $S_1 = \dfrac{1}{2}\pi r_1^2$;

$S_1 + S_2 = \dfrac{1}{2}\pi r_1^2 + \dfrac{1}{2}\pi r_2^2 = \dfrac{1}{2}\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right) = \dfrac{1}{2}\pi r_3^2$;

по т. Пифагора $\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BC\right)^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2;\frac{1}{4}\left(AC^2+BC^2\right)=\frac{1}{4}AB^2$.

Утверждение доказано.

1126. **Дано:** круг (O; 10), $\angle AOB = 60°$.



Найти: $S_{\text{ост}}$.

Решение.

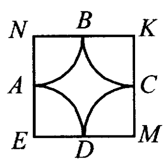
$S_{\text{ост}} = S_{\text{круга}} - S_{ABC}$.

$S_{\text{круга}} = 100\pi,\ S_{ABC} = \frac{\pi\cdot 100\cdot 60}{360}=\frac{100\pi}{360}=\frac{100\pi}{6}$,

$S_{\text{ост}} = 500\pi/6 \approx 261{,}7\text{см}^2$.

1127. $S=\frac{\pi R^2\cdot 72°}{360°}$; $R=\sqrt{\frac{360\cdot S}{72\pi}}=\sqrt{\frac{5S}{\pi}}$.

1128. **Дано:** $ENKM$ – квадрат, $EN = a$.



Найти: S_{ABCD}.

Решение.

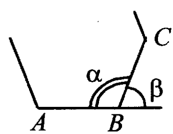
$S_{ABCD} = S_{ENKM} - 4S_{ANB}$; $S_{\text{сеч}}=\frac{\pi R^2\cdot\alpha}{360°}$,

следовательно

$$S_{ANB}=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot 90}{360}=\frac{\pi a^2}{16};S_{ABCD}=a^2-4\frac{\pi a^2}{16}=a^2-\frac{\pi a^2}{4}=\frac{a^2(4-\pi)}{4}.$$

Дополнительные задачи

1129. **Дано:** n-угольник; **а)** $\beta = 18°$, **б)** $\beta = 40°$, **в)** $\beta = 72°$, **г)** $\beta = 60°$. **Найти:** n.

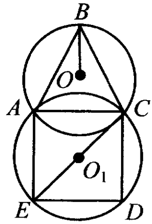


Решение.

а) $n=\frac{360°}{18°}=20$; **б)** $n=\frac{360°}{40°}=9$;

в) $n=\frac{360°}{72°}=5$; **в)** $n=\frac{360°}{60°}=6$.

1130. <u>**Дано:**</u> ΔABC, $AB = BC = AC$ вписан в Окр(O; 3 дм); $ACDE$ – квадрат вписан в Окр(O_1; R). <u>**Найти:**</u> R.

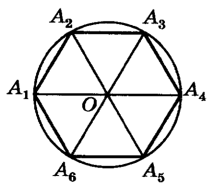


<u>**Решение.**</u>

Так как ΔABC – правильный, то $AB = R\sqrt{3}$, т.е. $AB = 3\sqrt{3}$ дм, значит сторона квадрата равна $3\sqrt{3}$ дм. $EO_1 = O_1C$, следовательно $R = \frac{1}{2}EC$.

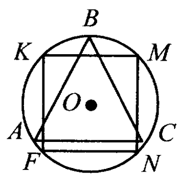
$EC^2 = ED^2 + DC^2 = 27 + 27 = 54$. $EC = 3\sqrt{6}$, т.е. $R = 3\sqrt{6}$.

1131. r – радиус описанной окружности; $OA_1 = r$; $A_1A_4 = 2r$. Имеем: $\Delta A_1OA_2 = \Delta A_2OA_3 = \Delta A_3OA_4$ – равносторонние: $A_1O = A_1A_2 = r$. Найдем периметр шестиугольника:



$$P = r \cdot 6 = \frac{2{,}24}{2} \cdot 6 = 6{,}72 \text{ см}.$$

1132. <u>**Дано:**</u> ΔABC – правильный и $KMNF$ – квадрат; **а)** вписаны в одну Окр; **б)** описаны около одной Окр. <u>**Найти:**</u> $S_\Delta : S$.



<u>**Решение.**</u>

а) Пусть $KM = x$, R – радиус;

$FN^2 + NM^2 = FM^2$;

$2x^2 = 4R^2$. $x^2 = 2R^2$, $x = R\sqrt{2}$, т.е.

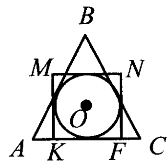
$FN = NM = R\sqrt{2}$.

$S = NM^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$; $AB = R\sqrt{3}$, т.к. ΔABC – правильный,

то $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$,

значит $\frac{S_\Delta}{S} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \cdot \frac{1}{2R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

б) Пусть r – радиус окружности.



$MN = 2r \Rightarrow S = 4r^2$.

$$AB = 2\sqrt{3}r \Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}12r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}r^2.$$

$$\frac{S_\Delta}{S} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

1133. **<u>Дано:</u>** $A_1A_2...A_{12}$ – правильный вписанный в Окр(O; R); $A_1A_6 \cap A_2A_9 = B$.

<u>Доказать:</u> а) ΔA_1A_2B и ΔA_6A_9B – правильные; **б)** $A_1A_6 = 2r$.

<u>Доказательство.</u>

а) Т.к. правильный 12-угольник вписан в окружность, то каждая дуга $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{11}A_{12} = 360^\circ : 12 = 30^\circ$, имеем

$$\angle A_2A_{11}B = \frac{1}{2} \cdot A_2A_4A_6 = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

$$\angle A_9A_2B = \frac{1}{2} \cdot A_1A_{11}A_9\text{:}\ \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

$$\angle A_9A_6B = \frac{1}{2}A_2A_4A_9 = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

$$\angle A_6A_9B = \frac{1}{2} \cdot A_2A_4A_6 = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Т.к. сумма углов треугольника 180°, то $\angle A_1BA_2 = \angle A_6BA_9 = 60^\circ$, т.е. ΔA_1A_2B и ΔA_6A_9B – правильные.

б) $\angle A_1A_6A_7$ – вписанный, $\angle A_1A_6A_7 = \frac{1}{2} \cdot A_1A_{10}A_7 = 90^\circ$, т.е.

$A_6A_1 \perp A_1A_{12}$ и $OH_2 \perp A_1A_{12} \Rightarrow OH_2 \parallel A_1A_6$.

Так же и $\angle A_{12}A_1A_6 = 90^\circ$; $A_1A_6 \perp A_6A_7$ и $OH_1 \perp A_6A_7 \Rightarrow OH_1 \parallel A_1A_6$.

Получаем, что 4-угольник $A_1A_6H_1H_2$ – прямоугольный, т.е. $A_1A_6 = H_1H_2 = 2r$.

1134. Так как правильный 10-угольник вписан в окружность, то каждая дуга $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_9A_{10} = 360^\circ : 10 = 36^\circ$.

ΔA_1A_2B и ΔA_4BO: $\angle A_1A_2B = \angle A_4BO$; $\angle A_1 = \dfrac{1}{2}A_2A_4 = 36°$;

$\angle A_2 = \dfrac{1}{2}A_1A_7 = 72°$, $\angle O = A_2A_4 = 72° \Rightarrow \angle A_2 = \angle O$.

$\Delta A_1A_2B \sim \Delta A_4BO$ (по двум углам).

Рассмотрим $\angle A_2OA_7$ – это центральный угол, тогда $\angle A_2OA_7 = \angle A_2A_4A_7 = 180°$, значит A_2A_7 – диаметр, т.е. $A_2A_7 = 2R$. ΔA_1A_2B – равнобедренный, т.к. $\angle A_2 = \angle B = 72°$, значит, $A_1A_2 = A_1B$. ΔBA_4O – равнобедренный, т.к. $\angle B = \angle O = 72°$, значит $BA_4 = A_4O$.

$A_1A_4 - A_1A_2 = A_1A_4 - A_1B = BA_4 = A_4O = R$, суть утверждения задачи.

1135. $S = \pi r^2$; $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{36}{\pi}} = 6$ см. a – сторона шестиугольника,

$a = r = 6$ см. Имеем: $S_{\text{шест.}} = \dfrac{1}{2}\sin 60° \cdot a \cdot a \cdot 6 = 54\sqrt{3}$ см^2.

1136. Докажем, что все стороны равны:

$A_1B_1 = A_2C_2 = R$, $A_1A_2 = A_1C_2 + C_2B_1 + B_1A_2$, если $C_2B_2 = x$, то $x + R - x + R - x = 2R - x = A_1A_2$. $x = 2R - A_1A_2$.

Аналогично: $C_3B_2 = C_4B_3 = C_1B_4 = 2R - A_1A_2$, т.к. $A_1A_2 = R\sqrt{2}$, то $C_2B_1 = ... = B_4C_1 = R(2 - \sqrt{2})$.

Докажем, что $C_2B_1 = B_1C_3$. По т. Пифагора:

$$B_1C_3 = \sqrt{2(R-x)^2};\ B_1C_3 = \sqrt{2}(R-x).$$

Подставим x: $B_1C_3 = \sqrt{2}(R - 2R + R\sqrt{2})$; $B_1C_3 = 2R - R\sqrt{2}$.

Получаем, что все стороны равны. Докажем, что все углы равны: $\Delta A_1C_2B_4 = \Delta B_1A_2C_3 = \Delta B_2A_3C_4 = \Delta B_3A_4C_1$ – прямоугольные равнобедренные треугольники, острые углы по 45°. Углы многоугольника являются смежными с внутренними углами треугольников, т.е

$\angle C_2 = \angle B_1 = \angle C_3 = \angle B_2 = \angle C_4 = \angle B_3 = \angle C_1 = \angle B_4 = 135°$. Заключаем, что $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ – правильный.

$$S = 8 \cdot S_{\Delta B_1OC_2};\ S_{\Delta B_1OC_2} = \frac{1}{2}OB_1 \cdot OC_2 \cdot \sin\angle B_1OC_2.$$

$\angle B_1OC_2 = 45°$ (т.к. все углы по 135°), то в ΔB_1OC_2:

$\angle B_1 = 67{,}5°$, $\angle C_2 = 67{,}5°$.

OB_1 и OC_2 выразим через R по т. косинусов:

$B_1C_1^{\,2} = OB_1^{\,2} + OC_2^{\,2} - 2OB_1 \cdot OC \cdot \cos 45°$.

$$R^2\left(2-\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$R^2\left(2-\sqrt{2}\right)^2 = x^2\left(2-\sqrt{2}\right) \Rightarrow x = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

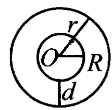
$$S_{\Delta B_1OC_2} = \frac{1}{2}R\sqrt{2-\sqrt{2}}R\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin 45° = \frac{1}{2}R^2\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(2\sqrt{2}-2\right)R^2}{4}.$$

$$S = 8 \cdot S_{\Delta B_1OC_2};\ 8\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)R^2}{2} = 4\left(\sqrt{2}-1\right)R^2.$$

1137. <u>**Дано:**</u> круг $(O;\ R)$; $R = 6370$ км; $2C = 84\ 152$ км.

<u>**Найти:**</u> d.

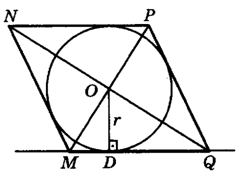
<u>**Решение.**</u>



$C = 2\pi r$, $42\ 076 = 2\pi r$, $r = 6700$ км.

$d = r - R = 6700 - 6370 = 330$ км.

1138. $MNPQ$ – ромб, r – радиус вписанной окружности.



а) $MP = 8$ см; $NQ = 6$ см; $MO = 4$ см; $OQ = 3$ см. Тогда в ΔMOQ $MQ = 5$ см (по теореме Пифагора).

$2S_{MNO} = MO \cdot NO = r \cdot MQ$. Получаем:

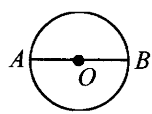
$$r = \frac{MO \cdot NO}{MQ} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} \text{ см и } C = 2\pi r = \frac{24}{5}\pi \text{ см.}$$

б) a – сторона ромба $MNPQ$, $\angle\alpha$ – острый угол.

$S_{MNPQ} = a^2 \sin\alpha = 2ar$, тогда $r = \dfrac{1}{2}a\sin\alpha$ и

$C = 2\pi r = \pi a \sin\alpha$.

1139. <u>**Дано:**</u> круг $(O;\ R)$, $v = 4$ км/ч, $t_1 > t_2$ на $\dfrac{3}{4}$ ч.



<u>**Найти:**</u> $C_{\text{круга}}$.

<u>**Решение.**</u>

Пусть время, если идти по диаметру, равно t, тогда

$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}4t = 2t$, отсюда $C = 4\pi t$, но: $S = 4\left(t + \frac{3}{4}\right)$, т.к.

$C = S$, то $4\pi t = 4\left(t + \frac{3}{4}\right) = 4t + 3,\ t = \frac{3}{4\pi - 4} \approx 0{,}35$.

$C = 4\pi \cdot 0{,}35 \approx 4{,}396$ км.

1140. $S = \pi R^2$; $S_n = \frac{1}{2}P_n \cdot R$. $\frac{S}{S_n} = \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2}P_n \cdot R} = \frac{2\pi R}{P_n} = \frac{C}{P_n}$, ч.т.д.

1141. Пусть дана хорда $AB = 6$ см. Для квадрата $a_4 = \sqrt{2}R_1$, где a_4 – сторона квадрата, а R_1 – радиус описанной около него окружности, значит, $R_1 = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ см.

Для правильного шестиугольника $a_6 = R_2$, где a_6 – сторона шестиугольника, а R_2 – радиус описанной около него окружности, значит, $R_2 = a_6 = 6$ см.

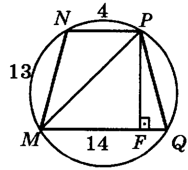
Большая длина дуги AB для окружности, в которую вписан квадрат, $l_1 = 2\pi R_1 - \frac{2\pi R_1}{4} = \frac{3\pi R_1}{2}$; а большая длина дуги AB для окружности, в которую вписан шестиугольник

$l_2 = 2\pi R_2 - \frac{2\pi R_2}{6} = \frac{5\pi R_2}{3}$.

Искомая сумма длин этих дуг:

$$l_1 + l_2 = \frac{3\pi R_1}{2} + \frac{5\pi R_2}{3} = \pi\left(\frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{5 \cdot 6}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\left(9\sqrt{2} + 20\right)\text{см.}$$

1142. $MNPQ$ – данная трапеция. MQ и NP – ее основания. $MQ = 14$ см; $NP = 4$ см; $MN = 13$ см. Из условия следует, что $MNPQ$ – равнобедренная трапеция, значит, $MN = PQ = 13$ см. MP – диагональ трапеции и PF – ее высота. Тогда



$FQ = \frac{MQ - NP}{2} = \frac{14 - 4}{2} = 5$ см, $MF = 9$ см.

Рассмотрим прямоугольные треугольники MPF и PFQ. По теореме Пифагора: $PF = \sqrt{PQ^2 - FQ^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ см и $MP = \sqrt{MF^2 + PF^2} = 15$ см. Так как окружность описана около трапеции, то она описана около ΔMPQ. Значит

$\sin \angle PMQ = \dfrac{PQ}{2R}$. $S_{\Delta MPQ} = PF \cdot MQ = MP \cdot MQ \cdot \sin \angle PMQ$

или $PF = MP \cdot \dfrac{PQ}{2R}$, откуда $R = \dfrac{MP \cdot PQ}{2 \cdot PF} = \dfrac{15 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \dfrac{65}{8}$ см и

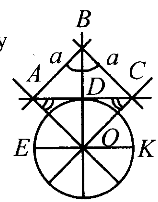
$C = 2\pi R = \dfrac{65\pi}{4}$ см.

1143. r – радиус окружности, вписанной в треугольник, P – периметр этого треугольника.

$S_{\text{тр-ка}} = \dfrac{1}{2} Pr$; $r = \dfrac{2S}{P}$; $C = 2\pi r = \dfrac{4\pi S}{P}$. k – коэффициент подобия; $S_{\text{др.тр-ка}}$ в k^2 раз больше $S_{\text{тр-ка}}$;

$C_{\text{др.}} = \dfrac{4\pi k^2 S}{kP} = \dfrac{k 4\pi S}{P} = kC$, т.е. $C_{\text{др.}} = kC$, ч.т.д.

1144. Так как 8-угольник правильный, то $\angle = 135°$. Построим ΔABC по двум сторонам и углу между ними, т.к. $\angle = 135°$; по свойству углов треугольника $\angle A = \angle C = 45°$. Строим ΔACO: по AC и прилежащим углам по 45°. Точка O – центр окружности радиусом OD; дальше построение симметрично точке O.

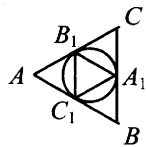


1145. R – радиус искомого круга, r_1 и r_2 – радиусы данных кругов. Тогда $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi R^2$, или $r_1^2 + r_2^2 = R^2$. Значит, R – гипотенуза прямоугольного треугольника, где r_1 и r_2 – его катеты. Поэтому, чтобы построить искомый круг, сначала строим прямоугольный треугольник, где катеты равны r_1 и r_2. Затем проведем окружность, радиус которой равен гипотенузе. Ее границы и будут границами искомого круга.

1146. а) <u>**Дано:**</u> окр(O; R).

<u>**Построить:**</u> ΔABC: $OA = OB = OC = R$.

<u>**Построение.**</u>

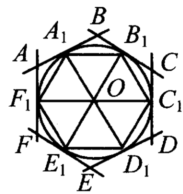


Впишем в окружность правильный ΔABC, затем через каждую вершину проведем прямые параллельные противоположной стороне. Фигура, образованная пересечением трех сторон – искомый треугольник.

б) <u>**Дано:**</u> окр(O; R).

<u>**Построить:**</u> описанный 6-угольник.

<u>**Построение.**</u>

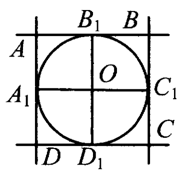


Построить вписанный 6-угольник со стороной, равной R. Через точки A, B_1,..., F_1 провести прямые перпендикулярные OA_1, OB_1, ..., OF_1 эти прямые пересекутся в точках A, B, C, D, E, F; $ABCDEF$ – искомый 6-угольник.

1147. а) <u>**Дано:**</u> окр(O; R).

<u>**Построить:**</u> описанный квадрат.

<u>**Построение.**</u>

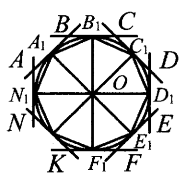


Построить два взаимно перпендикулярных диаметра $A_1B_1 \perp C_1D_1$. Через C_1 и D_1 построить прямые, параллельные A_1B_1, а через A_1 и B_1 – параллельные C_1D_1, эти прямые пересекаются в точках A, B, C, D; $ABCD$ – искомый квадрат.

б) <u>**Дано:**</u> окр(O; R).

<u>**Построить:**</u> описанный 8-угольник.

<u>**Построение.**</u>



Через т. О построить $N_1D_1 \perp B_1F_1$; $C_1K_1 \perp A_1E_1$ и K_1C_1, A_1E_1 – биссектрисы прямых углов.

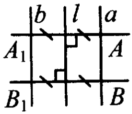
$\angle B_1OD_1 = \angle D_1OF_1 = \angle F_1ON_1 = \angle N_1OB_1$.

Через каждую точку A_1, B_1,...N_1 построить прямые, перпендикулярные OA_1, OB_1, ..., ON_1. Эти прямые пересекутся в точках A, B, C, D, E, F, K, N. $ABCDEFKN$ – искомый.

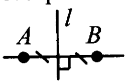
Глава XIII.
Движения

§ 1 Понятие движения

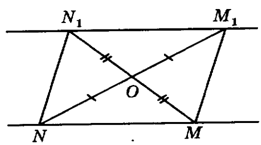
1148. а) При осевой симметрии сохраняется расстояние между точками. $AA_1 \perp l$ и $BB_1 \perp l$, отсюда $b \parallel a$. Так как $a \parallel l$ и $a \parallel b$, то $b \parallel l$.



б) Если $a \perp l$, то симметричная ей $a \perp l$; осевая симметрия – отображение плоскости на себя.



1149. а) O – центр симметрии. M и N – произвольные точки данной прямой. Они отображаются в точки M_1 и N_1 так, что $MO = OM_1$ и $NO = ON_1$. Значит, четырехугольник MN_1M_1N – параллелограмм, и $MN \parallel M_1N_1$.

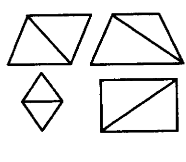


б) При центральной симметрии каждая точка отображается в точку прямой, проходящей через эту точку и центр симметрии. Так происходит с каждой точкой и значит, вся прямая отображается на себя.

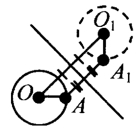
1150. Решение приведено в учебнике.

1151. Так как осевая и центральная симметрия есть движение, то $a \parallel b$ отображаются на прямые $a_1 \parallel b_1$.

1152. Все пункты доказываются одинаково. Все 4 фигуры состоят из 2 треугольников. Так как при движении отрезок отображается на равный отрезок, то треугольник – на равный треугольник.



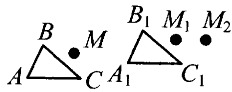
1153. При движении сохраняются расстояния, т.е. $OA = O_1A_1$.



Каждая точка окружности отображается в точку на окружности, симметричной данной, ч.т.д.

1154. См. учебник (ст. 296–297).

1155. Пусть f – не единственное, есть еще и g.

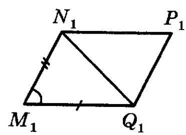


Тогда существует M, такая, что: $M \xrightarrow{f} M_1$; $M \xrightarrow{g} M_2$. Т.к. при движении расстояния сохраняются, то $AM = A_1M_1$, $AM = A_1M_2$; значит $A_1M_1 = A_1M_2$, т.е. A_1 – равноудаленная от M_1 и M_2, точки B_1 и C_1 – равноудалены от M_1 и M_3, т.е. по свойству A_1, B_1, C_1 – лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1 – противоречие.

A_1, B_1, C_1 – вершины $\Delta A_1B_1C_1$, т.е. не лежат на одной прямой, следовательно, f – единственное движение, ч.т.д.

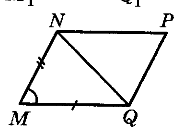
1156. Решение приведено в учебнике.

1157. $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ – 2 данных параллелограмма. $MQ = M_1Q_1$; $MN = M_1N_1$; $\angle M = \angle M_1$ (по условию).



Проведем диагонали NQ и N_1Q_1.

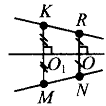
Рассмотрим полученные треугольники.



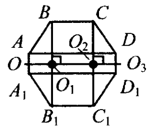
$\Delta MNQ = \Delta M_1N_1Q_1$ (по первому признаку равенства треугольников). Значит, $NQ = N_1Q_1$. Отсюда следует, что есть такое движение, при котором точки MNQ отображаются в точки $M_1N_1Q_1$. При этом движении прямая NP отображается на прямую, проходящую через точку N_1 и параллельную прямой M_1Q_1, т.е. на прямую M_1P_1.

Аналогично прямая PQ отображается на прямую P_1Q_1. Поэтому параллелограмм $MNPQ$ отображается на параллелограмм $M_1N_1P_1Q_1$. Любое движение является наложением. Таким образом, параллелограммы $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ можно совместить наложением. Значит, $MNPQ = M_1N_1P_1Q_1$.

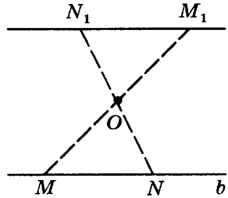
1158. Построим перпендикуляры от b к a: NR, MK.
$RN \cap a = O$, $MK \cap a = O_1$,
$ON = OR$, $KO_1 = MO_1$.
Через K и R построим b_1.



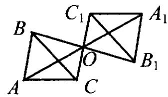
1159. Через точки A, B, C, D опустить перпендикуляры к a. На этих перпендикулярах отложить отрезки $AO = OA_1$;
$BO_1 = O_1B_1$; $CO_2 = O_2C_1$; $DO_3 = O_3D_1$;
$A_1B_1C_1D_1$ – искомый.



1160. b – данная прямая, отметим на прямой b точки M и N. Построим сначала точку M_1, симметричную точке M относительно O. Соединим точки M и O, продолжим его за точку O на расстояние $MO = OM_1$. Так же построим точку N_1. Прямая N_1M_1 – искомая.

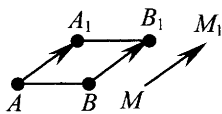


1161. Построить лучи: AO, BO, CO.
Отложить $AO = OA_1$, $BO = OB_1$,
$CO = OC_1$;
$\Delta A_1B_1C_1$ – искомый.

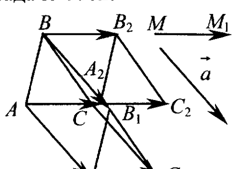


§ 2 Параллельный перенос и поворот

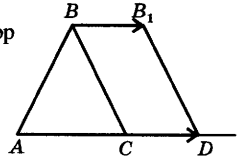
1162. От B отложить вектор, равный
$\overrightarrow{MM_1}$,
и от A сделать то же самое.
B_1A_1 – искомый.



1163. Построение выполняется аналогично задаче 1162.
а) $\Delta A_1B_1C_1$;
б) $\Delta A_2B_2C_2$.

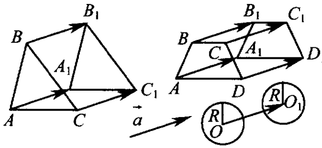


1164. а) ΔABC – данный равнобедренный треугольник. От точки B отложим вектор $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CD}$ B_1D – искомый отрезок.

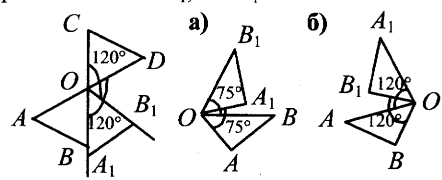


б) По построению $BB_1 = CD$ и $BB_1 \parallel CD$. Четырехугольник BB_1DC – параллелограмм. Тогда $B_1D = BC = AB$. $BB_1 \parallel CD$ и $BB_1 \parallel AD$. Значит, AB не параллельно B_1D, т.е. BB_1DC – равнобедренная трапеция, ч.т.д.

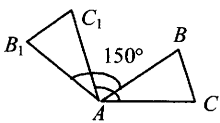
1165. В каждом случае от вершин фигур откладываем вектора, равные вектору $\vec{a}$, получаем фигуру, равную данной.



1166. При центральной симметрии $A \to B \to C \to D$, а затем при повороте на 120° $C \to B_1$, $D \to A_1$.



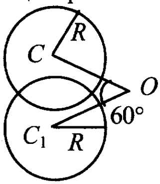
1167.



1168. Рассмотрим ΔABD. AD и BD – биссектрисы углов A и B, значит, $\angle BAD = \angle ABD = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. $AD = DB$, $\angle ADB = 180^\circ -$ $- (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$. Поэтому при повороте вокруг точки D на 120° вершина A отображается в вершину B, вершина B – в C, C – в A. Таким образом, ΔABC отображается на себя.

1169. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, равны и в точке пересечения делятся пополам. Значит, при повороте вокруг точки пересечения диагоналей на угол 90° каждая из вершин квадрата отображается в соседнюю вершину. Весь квадрат отображается на себя, что и требовалось доказать.

1170. а) Если C и O не совпадают, то $OC \to OC_1$. Наша окружность с цент-ром в точке C переходит в окружность с центром в т. C_1.



б) Если C и O совпадают, то окружность отобразится сама на себя.

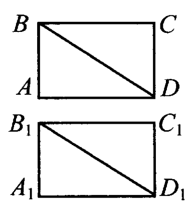
1171. Решение приведено в учебнике.

Дополнительные задачи

1172. Возьмем любую произвольную точку P на прямой AB. Тогда P_1 – точка, в которую отображается точка P при данном движении. $AP = AP_1$. Если точки P и P_1 не совпадают, то точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PP_1. Аналогично точка B тоже лежит на этом серединном перпендикуляре. Значит, прямая AB – серединный перпендикуляр к отрезку PP_1. Но этого не может быть, т.к. точка P лежит на прямой AB. Значит, точки P и P_1 совпадают. Если произвольная точка P прямой AB отображается на себя при данном движении, то и вся прямая AB отображается на себя, ч.т.д.

1173. Возьмем некоторую точку D на плоскости. Допустим D не переходит в D_1, тогда $\Delta ABD \neq \Delta ABD_1$, а по следствию при движении треугольник отображается на равный ему треугольник. Утверждение доказано.

1174. **<u>Дано:</u> а)** $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$;
б) $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$.
<u>Доказать:</u> $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.
<u>Доказательство.</u>



а) Так как $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольники, то $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$ и

$AD = BC = A_1D_1 = B_1C_1$.

В $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ (по 2-м катетам),

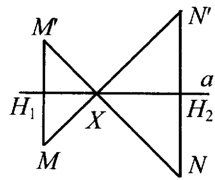
$\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$, (по 2-м катетам).

Получаем, что $ABCD = A_1B_1C_1D_1$, ч.т.д.

б) Исходя из пункта а): $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ (по катету в гипотенузе), $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ (по катету и гипотенузе).

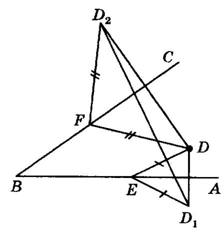
Получаем, что $ABCD = A_1B_1C_1D_1$, ч.т.д.

1175. Построим точки M' и N', симметричные точкам M и N соответственно относительно прямой a. Прямые $M'N$ и $N'M$ пересекутся в искомой точке X. $\Delta MH_1X \sim \Delta NH_2X$ (по построению) с коэффициентом $k = \dfrac{MH_1}{NH_2}$, т.е.



$MX = k \cdot XN$ и точка X будет такая, что $MX + XN$ примет наименьшее значение в искомой точке X.

1176. Найдем точки D_1 и D_2 симметричные точке D относительно сторон AB и BC угла ABC. Значит, $ED = ED_1$ и $FD = FD_2$ (где E и F – произвольные точки на сторонах AB и BC соответственно). Тогда $P_{\Delta DEF} = D_1E + FE + D_2F$. В ΔD_2FE имеем: $D_2F + FE \geq D_2E$. Аналогично $D_2E + ED_1 \geq D_2D_1$.



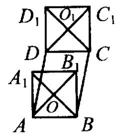
Отсюда: $D_2F + FE + ED_1 \geq D_2E + ED_1 \geq D_2D_1$, т.е.

$D_2F + EF + ED_1 \geq D_2D_1$ (если точки E и F лежат на отрезке D_2D_1, то верен знак равенства). Поэтому

$P_{\Delta DEF} = D_2F + FE + ED_1$ принимает наименьшее значение, когда точки E и F являются точками пересечения прямой D_2D_1 со сторонами AB и BC угла ABC.

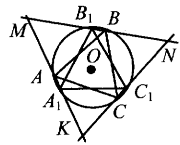
1177. Решение приведено в учебнике.

1178. Так как ABB_1A_1 и DCC_1D_1 квадраты, то $AB \parallel A_1B_1 \parallel DC \parallel D_1C_1$; $AB_1 \parallel DC_1$, и $AO_2 = DO_1$.
Докажем, что ADO_1O_2 – параллелограмм.
Так как $AO_2 = DO_1$, $AO_2 \parallel DO_1$, то $AD \parallel O_1O_2$, а т.к. $\angle DAO_2 = \angle DO_1O_2$ (две параллельные прямые и секущая), то $AD = O_1O_2$.



1179. Перенесем ΔSAB на вектор $\overrightarrow{BC}$. CC_1 и DD_1 будут его высотами, которые пересекутся в точке K. Тогда третья высота, опущенная на сторону CD, обязана проходить также через точку K и принадлежать прямой SK. Получаем, что $SK \perp CD$, а, значит, и AB.

1180. 1) Случай, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O очевиден, т.к. в этом случае точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 должны быть диаметрально противоположны.



2) ΔMNK может лежать внутри и вне круга.
Рассмотрим случай, когда он лежит вне круга (случай, когда он лежит внутри круга аналогичен).
Докажем, что ΔMNK – правильный.

$$\begin{cases} \overset{\smile}{B_1C} = \overset{\smile}{B_1C} \\ \overset{\smile}{BC} = \overset{\smile}{B_1C_1} = 120^\circ \end{cases}$$

вычтем, получим: $\overset{\smile}{CC_1} = \overset{\smile}{BB_1}$, аналогично, $\overset{\smile}{CC_1} = \overset{\smile}{BB_1} = \overset{\smile}{AA_1}$.

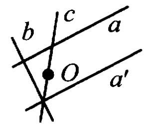
$$\begin{cases} \overset{\smile}{AA_1} = \overset{\smile}{AA_1} = 120^\circ \\ \overset{\smile}{B_1A_1} = \overset{\smile}{AC} \end{cases}$$

вычтем, получим $\overset{\smile}{B_1A} = \overset{\smile}{A_1C}$, аналогично, $\overset{\smile}{B_1A} = \overset{\smile}{A_1C} = \overset{\smile}{BC_1}$.

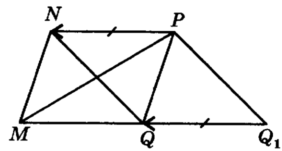
Пусть $\overset{\smile}{B_1B} = \alpha$,тогда

$$\angle NMK = \frac{\overset{\smile}{A_1CB} - \overset{\smile}{AB_1}}{2} = \frac{1}{2}\left(120^\circ + 120^\circ - \alpha - 120^\circ + \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

аналогично, $\angle NMK = \angle MNK = \angle MKN = 60°$.
Таким образом, ΔMNK – правильный.



1181. Построим прямую a', симметричную прямой a относительно точки O.
Наша искомая прямая будет проходить через точку O и через точку пересечения прямой a' и b.



1182. Построим отрезок MQ равный одному из оснований. Продолжим его за точку Q и на прямой отложим QQ_1, равный другому основанию. Построим ΔMPQ_1, где MP – отрезок, равный одной из данных диагоналей, а PQ – отрезок, равный другой диагонали. Далее построим точку N, в которую отображается точка P при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{Q_1Q}$. Таким образом, $MNPQ_1$ – искомая трапеция.

1183. Решение приведено в учебнике.

Глава XIV.
Начальные сведения из стереометрии

§ 1 Многогранники

1184. а) Прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней, 12 ребер 8 вершин.

б) Тетраэдр имеет: 4 грани, 6 ребер, 4 вершины.

в) Октаэдр имеет: 8 граней, 12 ребер, 6 вершин.

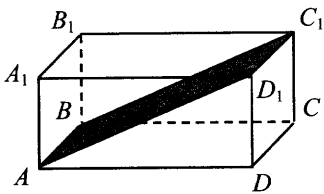
1185. Пусть имеется n-угольная призма. Так как призма получается параллельным переносом n-угольника и соединением соответствующих вершин, то число вершин равно $2n$ ($2n$ делится на 2). А число ребер равно $n + n + n = 3n$ ($3n$ делится на 3).

1186. Доказать, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна $P_{\text{осн}} \cdot h$ (боковое ребро прямой призмы равно ее высоте). Если развернуть боковую поверхность, то получится прямоугольник со сторонами $a_1 + a_2 + ... + a_n = P_{\text{основания}}$ ($a_1, ..., a_n$ – стороны основания) и h – высота призмы, т.о. $S = P_{\text{осн}} \cdot h$.

1187. а) Нет; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да; **д)** нет.

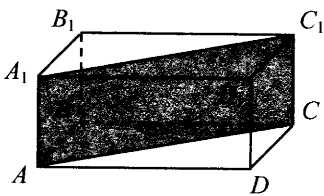
1188. Решение приведено в учебнике.

1189. а)



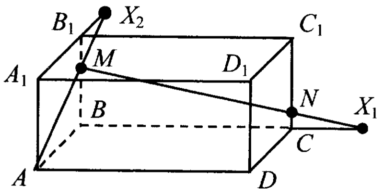
Т.к. $AD_1 \parallel BC_1$, $AD_1 = BC_1$ и $C_1D_1 \parallel AB$, $C_1D_1 = AB$, то ABC_1D_1 – параллелограмм.

б)

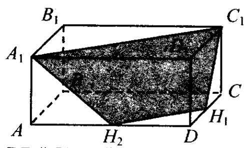


Т.к. $AC = A_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$ и $AA_1 = CC_1$ и $AA_1 \parallel CC_1$, то AA_1C_1A – параллелограмм.

1190.



1191. Докажем, что $B_1D_iH_1H_2$ – трапеция.

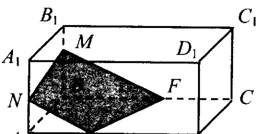


Так как $B_1D_1H_1H_2$ – плоскость, то

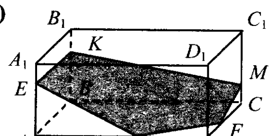
$$H_2C = CH_1 = \frac{1}{2}CD.$$

Так как $B_1D \parallel BD$, а $\Delta CH_2H_1 \sim \Delta CBD$ (по 2 сторонам и углу между ними), то $BD \parallel H_1H_2 \parallel B_1D_1$, т.е. $H_1H_2B_1D_1$ – трапеция.

1192. а)

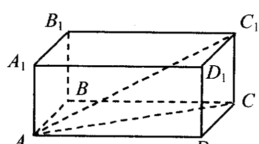


б)



1193. а) $AB = BC = 1$; $CC_1 = 2$;

$AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $AC_1=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$.



б) $AB = 8$; $BC = 9$; $CC_1 = 12$;

$AC = \sqrt{64+81} = \sqrt{145}$;

$AC_1 = \sqrt{145+144} = \sqrt{289} = 17$.

в) $AB = \sqrt{39}$; $BC = 7$; $CC_1 = 9$;

$AC = \sqrt{39+49} = \sqrt{88}$; $AC_1 = \sqrt{88+81} = \sqrt{169} = 13$.

1194. $AB = BC = CC_1 = a$.

$AC = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$; $AC_1 = \sqrt{2a^2+a^2} = a\sqrt{3}$.

1195. Т.к. объем тела, состоящего из двух других тел, равен сумме объемов этих тел минус их пересечение, то

а) $V = V_1 + V_2$; **б)** $V = V_1 + V_2 - \frac{1}{3}V_1 = \frac{2}{3}V_1 + V_2$.

1196. $AB = 8$; $BC = 12$; $AA_1 = 18$.

$V = AB \cdot BC \cdot AA_1 = 8 \cdot 12 \cdot 18 = 1728$ см^3.

$a_{\text{куба}} = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{1728} = 12$ см.

1197. $AC_1 = 13$; $BD = 12$; $BC_1 = 11$.

Т.к. $BD = AC$, то по теореме Пифагора

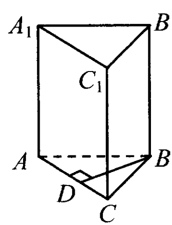
$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{13^2-12^2} = \sqrt{25} = 5$ см;

$BC = \sqrt{BC_1^2 - CC_1^2} = \sqrt{11^2-5^2} = \sqrt{6\cdot16} = 4\sqrt{6}$ см;

$AC = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{12^2-16\cdot6} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см.

1198. Решение приведено в учебнике.

1199. По теореме косинусов:



$BC^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120° =$
$= 34 + 15 = 49$ см^2.

$BC = 7$см. $BC \cdot BB_1 = 35$; $BB_1 = 35 : 7 = 5$ см.

$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC \cdot BB_1 =$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 120° \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^3.

1200. Т.к. все ребра равны a, то в основании призмы лежит правильный n-угольник.

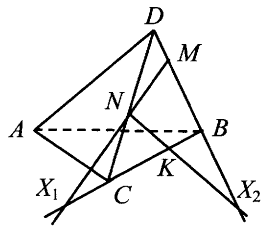
а) $V = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \sin 60° = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$; **б)** $V = a \cdot a \cdot a = a^3$;

в) $V = a\left(\dfrac{1}{2} \cdot 6a \cdot a \cdot \cos 30°\right) = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$;

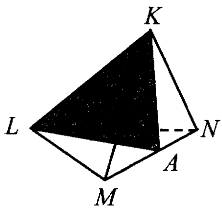
г) $V = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 8a \cdot \left(\dfrac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cos 22{,}5°\right) = \dfrac{4a^3 \cos 22°30'}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{2a^3}{\operatorname{tg} 22°30'}$.

1201. Нет.

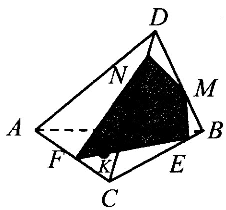
1202.



1203.

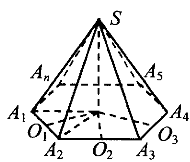


1204.



1205. Так как пирамида правильная, то в основании лежит правильный n-угольник, т.е. $HO_1 = HO_2 = HO_3 = ... = HO_n = r$.

Значит, $SO_1 = SO_2 = ... SO_n = \sqrt{SH^2 + r^2}$.



1206. Из задачи № 1205 все апофемы правильной пирамиды равны друг другу, площадь каждой боковой грани равна $\dfrac{ha}{2}$, где

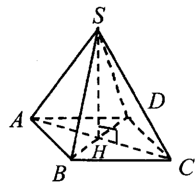
h – апофема, a – сторона основания пирамиды, значит,

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}h(a_1 + a_2 + ... + a_n) = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot h.$$

1207. **Дано:** $SH = 7$, $AB = 5$, $DB = 8$.

Найти: боковые ребра.

Решение.



По теореме Пифагора:

$$AH = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = \sqrt{25-16} = 3 \text{ см};$$

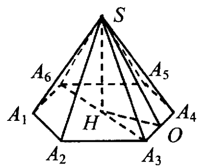
$$SA = SC = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} \text{ см};$$

$$SB = SD = \sqrt{DH^2 + SH^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65} \text{ см}.$$

1208. **Дано:** $A_1A_2 = a$, $S_{SA_3A_6} = S_{SA_1A_2}$.

Найти: $S_{\text{бок.пов}}$.

Решение.



$$A_3A_6 = 2R = 2a; HO = r = a\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$SO = \sqrt{SH^2 + HO^2}$. Т.к. $S_{SA_3A_6} = S_{SA_1A_2}$,

$$\frac{a}{2}\sqrt{SH^2 + \frac{3a^2}{4}} = a \cdot SH; 4SH^2 + 3a^2 = 16SH;$$

$$SH = \frac{a}{2}; SO = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3}{4}a^2} = a; \ S_{\text{бок.пов.}} = 6 \cdot \frac{a}{2} \cdot a = 3a^2.$$

1209, 1210. Решение приведено в учебнике.

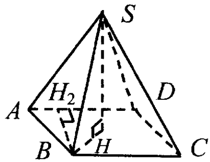
1211. **а)** Так как $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$, а в основании лежит квадрат, то

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 2 = 6 \text{ м}^3;$$

б) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 13{,}5 \cdot \sin 30° = 67{,}5$ см^2;

$V = \frac{1}{3} \cdot 67{,}5 \cdot 220 = 4950$ см^3.

1212. **<u>Дано:</u>** $AB = m$, $\angle BSD = \alpha$. **<u>Найти:</u>** V.



<u>Решение.</u>

$BD = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2}$.

Так как $SB = SD = SC = SA$, то

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{SH}$.

$SH = \dfrac{m\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $V = \dfrac{1}{3}m^2 \cdot \dfrac{m\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{m^3\sqrt{2}}{6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

§ 2 Тела и поверхности вращения

1213. Решение приведено в учебнике.

1214. **а)** $V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi \cdot 8 \cdot 3 = 24\pi$ см^3.

б) $V = SH = \pi r^2 \cdot h$; $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}} = \sqrt{\dfrac{120}{3{,}6\pi}} = \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см.

в) $r = h$, $V = 8\pi$ см^3. $V = \pi r^2 h = \pi h^3$; $h^3 = 8$; $h = 2$ см.

1215. **а)** $V_{\text{цил}} = \pi r^2 h$; $V_{\text{призмы}} = \dfrac{1}{2}h \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{a}{\sin 60°} = 2r$; $a = \sqrt{3}r$;

$\dfrac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цил}}} = \dfrac{h \cdot r^2 3\sqrt{3}}{4\pi r^2 h} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$;

б) $V_{\text{призмы}} = h \cdot a^2$; $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цил}}} = \dfrac{2 \cdot h \cdot a^2}{\pi a^2 h} = \dfrac{2}{\pi}$;

в) $V_{\text{призмы}} = \dfrac{1}{2} \cdot 6r \cdot r \cdot \cos 30° \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}r^2 h}{2}$;

$$\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цил}}}=\frac{3\sqrt{3}r^2h}{2\pi r^2h}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi};$$

г) $a=2r\sin\frac{180^\circ}{8}=2r\sin\frac{45^\circ}{2}$;

$$V_{\text{призмы}}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot a\cdot r\cdot\cos\frac{180^\circ}{2}\cdot h=8r^2\cdot h\cdot\cos\frac{45^\circ}{2}\sin\frac{45^\circ}{2}=2\sqrt{2}r^2h;$$

$$\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цил}}}=\frac{2\sqrt{2}r^2h}{\pi r^2h}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi};$$

д) $V_{\text{призмы}}=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2r\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot r\cos\frac{180^\circ}{n}h=\frac{1}{2}nr^2h\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}$;

$$\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цил}}}=\frac{n\cdot r^2h\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{2\pi r^2h}=\frac{n\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{2\pi}.$$

1216. **Дано:** $D = 1$ м, $h = L$. **Найти:** $S_{\text{бок.пов.}}$

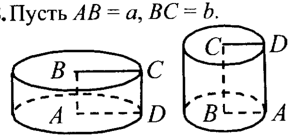
Решение: $L = 2\pi r = \pi D = \pi = h$; $S_{\text{бок.пов.}} = L\cdot h = \pi^2$ м^2.

1217. Задача сводится к нахождению площади боковой поверхности цилиндра высотой 4 м и диаметром 20 см.

$L = 2\pi r = \pi D = 0{,}2\pi$ м. $S_{\text{бок.пов.}} = L\cdot h = 0{,}2\pi\cdot 4 = 0{,}8\pi$ м^2;

$0{,}8\pi\cdot 1{,}025 = 0{,}82\pi$ м^2.

1218. Пусть $AB = a$, $BC = b$.



а) $S_{1\text{бок.пов.}} = 2\pi h_1 = 2\pi ab$; $S_{2\text{бок.пов.}} = 2\pi h_2 = 2\pi ba$;

б) $S_1 = 27\pi ab + 2\pi r^2 = 2\pi ab + 2\pi b^2$; $S_2 = 2\pi ab + 2\pi a^2$;

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi\left(ab+b^2\right)}{2\pi\left(ab+a^2\right)}=\frac{b(a+b)}{a(b+a)}=\frac{b}{a}.$$

1219. Решение приведено в учебнике.

1220. а) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2{,}25 \cdot 3 = 2{,}25\pi$ см^3;

б) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h;\ h = \dfrac{3V}{\pi r^2} = \dfrac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9$ см;

в) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h;\ r = \sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}} = \sqrt{\dfrac{3p}{m}}$.

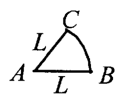
1221. __**Дано:**__ $S_{\text{осн}} = Q$, $S_{\text{бок.пов.}} = P$. __**Найти:**__ $V_{\text{конуса}}$.

__**Решение.**__

$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi r L = P;\ S_{\text{осн.}} = \pi r^2 = Q;\ L = \frac{P\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{a}};\ r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}};$$

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi a}};\ V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}Q \cdot \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi Q}}.$$

1222. __**Дано:**__ $\angle BAC = 60°$, $S = 45\pi$ дм^2. __**Найти:**__ V.



__**Решение.**__

$$S_{ABC} = \pi L^2 \cdot \frac{1}{6} = \pi r L;\ L = 6r;$$

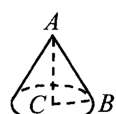
$$S_{\text{осн}} = S - S_{ABC} = 45\pi - \frac{\pi L^2}{6};$$

$$\pi r^2 = 45\pi - \frac{\pi L^2}{6} = 45\pi - 6r^2\pi;\ r^2 = \frac{45}{7}.$$

По теореме Пифагора: $h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{35 \cdot \dfrac{45}{7}} = 15$ дм;

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{45}{7} \cdot 15 = \frac{225\pi}{7}\ \text{дм}^3.$$

1223. __**Дано:**__ $AC = 6$ см, $CB = 8$ см. __**Найти:**__ $S_{\text{бок.пов}}$; S.



__**Решение.**__

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$ см.

$S_{\text{бок.пов.}} = \pi r h = 8 \cdot 10 \cdot \pi = 80\pi$ см^2.

$S = S_{\text{бок.пов.}} + S_{\text{осн.}} = 80\pi + \pi \cdot 64 = 144\pi$ см^2.

1224, 1225. Решение приведено в учебнике.

1226. а) $S = 4\pi R^2 = 64\pi$ см^2; $V = \frac{4}{3}R^3 = \frac{256}{3}\pi$ см^3.

б) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 3$ см; $S = 4\pi R^2 \approx 36$ см^2.

в) $S = 4\pi R^2$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4$ см; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi$ см^3.

1227. $V_З = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_З}{2}\right)^3 = \frac{32}{3}\pi D_2^3$; $V_Л = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_Л}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D_2^3$;

$$\frac{V_З}{V_Л} = \frac{32 \cdot \pi D_Л^2 \cdot 6}{3 \cdot \pi D_Л^2} = 64 .$$

1228. __**Дано:**__ $h_1 = 12$ см, $D_1 = 5$ см; $D_2 = 5$ см. __**Найти:**__ $V_1 - V_2$.

__**Решение.**__

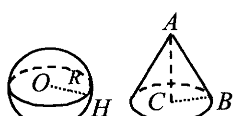
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 12 = 25\pi \text{ см}^3;$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3 \approx 21\pi \text{ см}^3.$$

$V_1 - V_2 > 0$, т.е. объем стаканчика больше объема мороженого, значит мороженое не переполнит стаканчик, если растает.

1229. Задача сводится к нахождению площади поверхности мяча радиусом 10 см. $S = 4\pi R^2 = 400\pi$ см^2; $1{,}08 \cdot 400\pi = 432\pi$ см^2.

1230. __**Дано:**__ $AB = 2OH = 2R$, $BC = \frac{1}{2}AC$.



__**Доказать:**__ $S_1 = S_2$.

__**Доказательство.**__

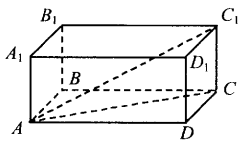
$S_1 = 4\pi R^2$. По теореме Пифагора:

$$AC=\sqrt{BC^2+AB^2};\ 4BC^2=BC^2+4R^2;\ BC=\frac{2R}{\sqrt{3}};\ AC=\frac{4R}{\sqrt{3}};$$

$$S_2=\pi\cdot BC\cdot AC+\pi\cdot BC^2=\pi\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4R}{\sqrt{3}}+\pi\cdot\frac{4R^2}{3}=\frac{8R^2\pi}{3}+\frac{4R^2\pi}{3}=4\pi R^2\cdot$$

1231. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=8;\ \dfrac{R_1}{R_2=2};\ \dfrac{S_1}{S_2}=\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2=4.$

Дополнительные задачи



1232. По свойству параллелограмма:
$AB=CD$, $AA_1=CC_1$. Из неравенства треугольника:
$AC<AB+AD$;
$AC_1<AC+AA_1;\ AC_1<AB+AD+AA_1$.

1233. По теореме косинусов:
$AC^2=AD^2+CD^2-AC\cdot DC\cos\angle D$;
$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle A$; т.к. $\cos\angle A=-\cos\angle D$,
получим $AC^2+BD^2=AD^2+CD^2+AB^2+AD^2$.
Аналогично получим, что

$$A_1C_1^2+B_1D_1^2=A_1D_1^2+C_1D_1^2+A_1B_1^2+A_1D_1^2;$$

$$AC_1^2+CA_1^2=AC^2+CC_1^2+AA_1^2+A_1C_1^2;$$

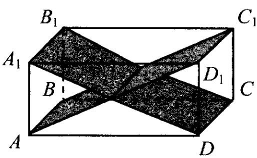
$DB_1^2+BD_1^2=BD^2+BB_1^2+DD_1^2+B_1D_1^2$. Складывая, получим

$$AC_1^2+CA_1^2+DB_1^2+BD_1^2=AC^2+CC_1^2+AA_1^2+$$

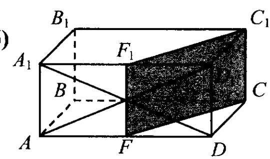
$$+A_1C_1^2+BD^2+BB_1^2+DD_1^2+B_1D_1^2=AD^2+CD^2+AB^2+AD^2+$$

$$+CC_1^2+AA_1^2+BB_1^2+DD_1^2+A_1D_1^2+C_1D_1^2+A_1B_1^2+A_1D_1^2.$$

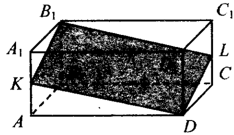
1234. а)



б)



1235. $KD = B_1L$ и $KD \parallel B_1L$, т.к.

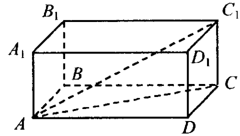


$$KD=\sqrt{AD^2+AK^2}=\sqrt{B_1C_1^2+C_1L^2}=$$

$= B_1L$ (по теореме Пифагора), аналогично, $DL \parallel KB_1$ и $DL = KB$, т.к.

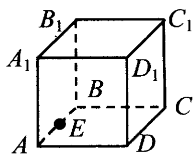
$$DL=\sqrt{BC^2+CL^2}=\sqrt{A_1B_1^2+A_1K^2}=$$

$= KB_1$, т.е KB_1LD – параллелограмм.



1236. **Дано:** $S_{ABCD}+S_{AA_1B_1B}+S_{ADD_1A_1}=$
$= 404$ дм^2, $AA_1 = 3k$, $AD = 7k$, $AB = 8k$.
Найти: AC_1.
Решение.
$AD \cdot AA_1 + AA_1 \cdot AB + AD \cdot AB = 404$;
$7k \cdot 3k + 3k \cdot 8k + 7k \cdot 8k = 404$;
$101k = 404$; $k = 4$.
$AA_1 = 12$ дм; $AD = 28$ дм; $AB = 32$ дм.

$$AC_1=\sqrt{A_1A^2+AD^2+AB^2}=\sqrt{144+784+1024}=\sqrt{1952}=4\sqrt{122}\text{ дм.}$$

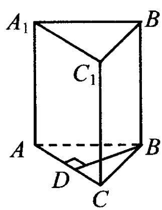


1237. а) $AD=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ см^3.

$V=216\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3=432\sqrt{2}$ см^3.

б) $AC_1=\sqrt{2AA_1^2}$; $AA_1=\dfrac{AC_1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$ см;

$V=6\sqrt{6}$ см^3.



в) По теореме Пифагора:

$$DE=\sqrt{AD^2+\frac{1}{4}AB^2}=\frac{\sqrt{5}}{2};\ AB=\frac{2}{\sqrt{5}}\text{ см;}$$

$$V=\frac{8\sqrt{5}}{25}\text{ см}^3.$$

1238. $AB = BC = m$, $\angle ABC \approx \varphi$, $BB_1 = BD$.

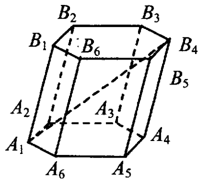
Так как $AB = BC$, то $\angle DBC=\dfrac{\varphi}{2}$, $\cos\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{BD}{BC}$,

$$BB_1 = DB = m \cdot \cos\frac{\varphi}{2};$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot m \cdot m \cdot \sin\varphi \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} m^3 \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2}.$$

1239. **Дано:** $A_1B_4 = 8$, $\angle B_4A_1B_1 = 30°$.

Найти: V.



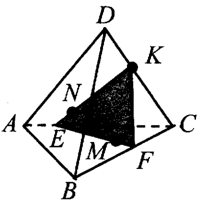
Решение.

$B_1B_4 = 8 \cdot \sin 30° = 4$; $A_1B_1 = \sqrt{64-16} = 4\sqrt{3}$;

$$B_1B_2 = \frac{1}{2} B_1B_4 = 2;$$

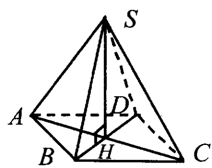
$$V = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60° \cdot 4\sqrt{3} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 72 \text{ см.}$$

1240.



ΔEFK – искомое сечение.

1241. $AD = 5$ м, $AB = 4$ м, $BD = 3$ м, $SH = 2$ м.



$S_{\Delta ASB} = S_{\Delta CSD}$; $S_{\Delta BSC} = S_{\Delta ASD}$.

$$SB = \sqrt{SH^2 + BH^2} = \sqrt{4 + 2{,}5} = 2{,}5 \text{ м.}$$

В ΔABD: $AD^2 = AB^2 + BD^2$, следовательно, он прямоугольный с прямым углом ABD. Из ΔABH по теореме Пифагора:

$$AH = \sqrt{AB^2 + BH^2} = \sqrt{16 + 2{,}25} = \sqrt{18{,}25};$$

$$AS = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{18{,}25 + 4} = \sqrt{22{,}25};$$

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{4}\sqrt{(AS + SB + BA)(AS + SB - BA)(AS + BA - SB)(SB + BA - AS)};$$

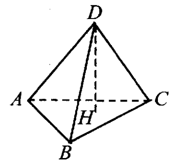
$$S_{\Delta BSC}=\frac{1}{4}\sqrt{(BS+SC+BC)(BS+SC-BC)(BS-SC+BC)(SC+BC-BS)};$$

$$S_{ABCD}=2\cdot S_{\Delta ABD}=2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot BD;\ S=S_{ABCD}+2S_{\Delta ASB}+2S_{\Delta BSC}=$$

$$=2\sqrt{34}+22\ \text{м}^2.$$

1242. **Дано:** $DH = 12$ см, $AB = 13$ см. **Найти:** V.

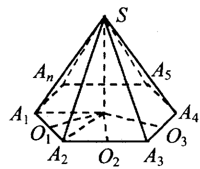
Решение.



$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB\cdot CB\cdot\sin\angle ABC\right)\cdot DH=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 13\cdot\sin 60^\circ\right)\cdot 12=169\sqrt{3}\ \text{см}^3.$$

1243. $A_1A_2 = a$, $\angle A_1SA_2 = \alpha$. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2SO_1}$,



$$SO_1=\frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ HA_1=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},$$

$$HO_1=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\cdot\cos\frac{180^\circ}{n}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

По теореме Пифагора:

$$SH=\sqrt{SO_1^2-HO_1^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}};$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}n\cdot a\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}=$$

$$=\frac{a^3\cdot n}{24}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

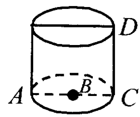
1244. Задача сводится к нахождению объема цилиндра $r = 2$ мм $= 0{,}2$ см.

$V = \pi r^2 h = 0{,}04\pi h$ см^3; $m = 2{,}6 \cdot V = 0{,}104\pi h = 6800$ г.

$h \approx 20823$ см ≈ 208 м.

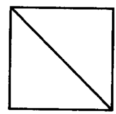
1245. Задача сводится к нахождению объема цилиндра радиуса 17 мм в высотой 25 м и цилиндра радиуса 13 мм и высотой 25 м.
$V_1 = \pi \cdot 1{,}7^2 \cdot 2500 = 7225\pi$ см^3; $V_2 = \pi \cdot 1{,}3^2 \cdot 2500 = 4225\pi$ см^3;
$V = V_1 - V_2 = 3000\pi$ см^3; $m = p \cdot V = 11{,}4 \cdot 3000\pi = 107$ кг.

1246. **Дано:** $BC = x$ см, $DC = x + 12$ см, $S = 288\pi$ см^3.
Найти: BC; DC.
Решение.



$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot x\,(x + 12) + 2\pi x^2 = 288\pi$.
$x^2 + 12x + x^2 = 144$; $x^2 + 6x - 72 = 0$;
$x_1 = 6$, $x_2 = -12$.
-12 не подходит по смыслу. $x + 12 = 18$ см.

1247. Сторона квадрата равна $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$, т.е. $2\pi r = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$;

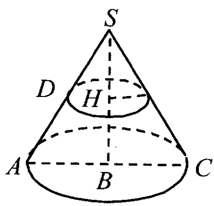


$$r = \frac{d}{2\pi\sqrt{2}};\ S = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4\pi^2 \cdot 2} = \frac{d^2}{8\pi}.$$

1248. $V_1 = 24$ см^2, $SB = 5$ см, $SH = 2$ см.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2 = 24.\ r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}.$$

$\Delta ASB \sim \Delta DSH$ (по катету и углу).



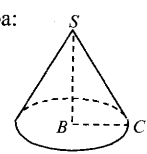
$$\frac{DH}{AB} = \frac{SH}{SB};\ AB = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot SB = 375 \text{ см}^3.$$

1249. $AC = 12$ см, $V = 324\pi$ см^3.

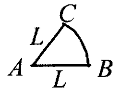
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 324\pi;\ CB = r = \sqrt{\frac{324 \cdot 3}{AC}} = \sqrt{\frac{972}{12}} = 9 \text{ см}.$$

Из прямоугольного ΔABC по теореме Пифагора:
$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$ см. Тогда искомая дуга равна



$$360^\circ \cdot \frac{CB}{AB} = 360^\circ \cdot \frac{9}{15} = 216^\circ.$$

1250. $\angle CAB = 120°$, $AB = L = 9$ см.

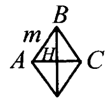


$$S_{бок} = \frac{120°}{360°}\pi L^2 = 27\pi \text{ см}^2;\ \pi r L = 27\pi;\ r = 3 \text{ см}.$$

По теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2} \text{ см};\ S_{осн} = \pi r^2 = 9\pi \text{ см}^2.$$

1251. <u>**Дано:**</u> $AB = BC = m$, $\angle BAC = \varphi$. <u>**Найти:**</u> V.



<u>**Решение.**</u>

$BH = m \sin \varphi$; $S_{бок.пов.} = \pi \cdot BH \cdot AB = \pi m^2 \sin \varphi$;

$S = 2S_{бок.пов.} - 2\pi m^2 \sin \varphi$.

1252. <u>**Дано:**</u> $D_1 = D_2$, $V_1 = V_2$. <u>**Найти:**</u> h.

<u>**Решение.**</u>

$$V_1 = V_2;\ \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h;\ h = \frac{4}{3}R.$$

1253. Задача сводится к нахождению объема шариков.

$$V_1 = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^3 = \frac{16}{3}\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{3}\pi \text{ см}^3;$$

$$V_2 = \pi\left(\frac{2{,}5}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{25}{16}\pi h \text{ см}^3.$$

$$V_1 = V_2; \frac{2}{3}\pi = \frac{25}{16}\pi h;\ h = \frac{32}{75} \text{ см}.$$

1254. Задача сводится к нахождению площади поверхности шара.

$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot (6375)^2\pi;\ \frac{1}{4}S = (6375)^2\pi \text{ км}^2 \approx 1{,}28 \cdot 10^8 \text{ км}^2.$$

1255. <u>**Дано:**</u> $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{m^2}{n^2}$. <u>**Найти:**</u> $\dfrac{V_1}{V_2}$.

<u>**Решение.**</u>

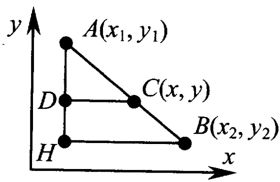
$$\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_1^2} = \frac{m^2}{n_2};\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^3}{\frac{1}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{m}{n}\right)^3.$$

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе X

1256. Предположим, что $ABCD$ – параллелограмм. Тогда его диаго-
(1184)* нали AC и BD в точке пересечения делятся пополам, т.е. середины диагоналей совпадают. Найдем координаты середины диагонали AC: $\left(\frac{x_1+x_3}{2};\frac{y_1+y_3}{2}\right)$. Координаты середины диагонали BD: $\left(\frac{x_2+x_4}{2};\frac{y_2+y_4}{2}\right)$. Отсюда середины диагоналей AC и BD совпадают, тогда и только тогда, когда:
$x_1+x_3=x_2+x_4; y_1+y_3=y_2+y_4$. Значит, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм тогда и только тогда, когда $x_1+x_3=x_2+x_4; y_1+y_3=y_2+y_4$, что и требовалось доказать.

1257. Рассмотрим ΔADC и ΔAHB.
(1185) Они подобны (по гипотенузе и углу). Таким образом,



$$\frac{DC}{HB}=\frac{AC}{AB};\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda};$$

$$x=\frac{\lambda x_2-\lambda x_1}{1+\lambda}+x_1; x=\frac{\lambda x_2+x_1}{1+\lambda};$$

$$\frac{AD}{AH}=\frac{AC}{AB};\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda}; x=\frac{\lambda y_2-\lambda_1}{1+\lambda}+y_1; x=\frac{\lambda y_2+y_1}{1+\lambda}.$$

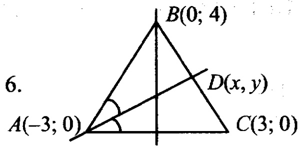
1258. Пусть медианы пересекаются в точке O $(x; y)$. Обозначим
(1186) середину стороны A_2A_3 точкой F $(x_4; y_4)$. Медиана A_1F делится точкой O на отрезки: $A_1O : OF = 2 : 1$. Найдем координаты точки F по формулам координат середины отрезка:
$x_4=\frac{x_2+x_3}{2}; y_4=\frac{y_2+y_3}{2}$. Тогда мы можем найти координаты точки O, используя формулу: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ (см. задачу 1185), причем, в данном случае $\lambda = 2$:

$$x=\frac{x_1+2\cdot x_4}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; y=\frac{y_1+2\cdot y_4}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

---

* В скобках дана нумерация задач из старого издания.

1259. AD – биссектриса;
(1187) $A(-3; 0)$; $C(3; 0)$; $B(0; 4)$.



$AB = BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $AC = 6$.
Пусть $BD = z$, тогда
$DC = 5 - z$.

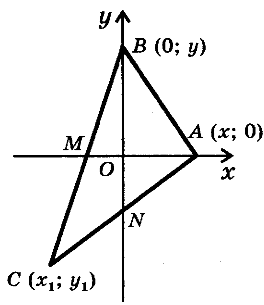
Так как по свойству биссектрисы $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$, то $6z = 25 - 5z$;

$$z = \frac{25}{11} = 2\frac{3}{11};\ 5 - z = 2\frac{8}{11}.$$

Воспользовавшись задачей 1257, получим:

$$\lambda = \frac{25}{11} : \frac{30}{11} = \frac{5}{6};\ x = \frac{0 + \frac{5}{6}\cdot 3}{\frac{5}{6} + 1} = \frac{15}{11};\ y = \frac{5}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{25}{11};\ D\left(\frac{15}{11}; \frac{24}{11}\right).$$

1260. Введем ДСК. Медианы AM и
(1188) BN лежат на осях координат. $A(x; 0)$, $B(0; y)$, $C(x_1; y_1)$. По условию: точка M – середина BC, точка N – середина AC. Абсцисса точки N равна $\dfrac{x + x_1}{2}$, но $\dfrac{x + x_1}{2} = 0$. Отсюда $x_1 = -x$. Ордината точки M равна $\dfrac{y + y_1}{2}$,



но $\dfrac{y + y_1}{2} = 0$, тогда $y_1 = -y$. Значит, точка C имеет координаты $(-x, -y)$. Тогда: $AC^2 = (x - (-x))^2 + (0 - y)^2$;
$AC^2 = (x + x)^2 + (0 - y)^2$; $BC^2 = (0 - (-x))^2 + (y - (-y))^2$;
$BC^2 = (0 + x)^2 + (y + y)^2$.
По условию $AC^2 = 9^2 = 81$; $BC^2 = 12^2 = 144$, значит,
$4x^2 + y^2 = 81$ и $x^2 + 4y^2 = 144$.
Сложим равенства: $5(x^2 + y^2) = 225$ или $x^2 + y^2 = 45$.

Но $AB^2 = x^2 + y^2$, значит, $AB^2 = 45$, $AB = 3\sqrt{5}$ см.

1261. Решим сначала задачу для двух точек:
(1189) $m_1(x - x_1) = m_2(x - x_2)$; $m_1x - m_1x_1 = m_2x - m_2x_2$.

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

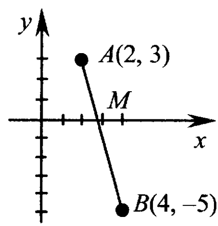
Теперь найдем центр тяжести между точкой x и x_3:

$$x' = \frac{\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}(m_1 + m_2) + x_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Аналогично $y' = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$; получим точки

$$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right).$$

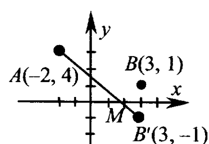
1262. **а)** Искомая точка лежит на пересечении прямой AB с осью x. Если бы
(1190) точка M не лежала на этой прямой, то получился бы ΔABM. А из неравенства треугольника $AB < AM + BM$. Таким образом, найдем уравнение прямой AB:



$$\begin{cases} -5 = 4k + b \\ 3 = 2k + b \end{cases} \begin{cases} k = -4 \\ b = 11 \end{cases} \quad y = -4x + 11.$$

Так как $y = 0$, то $-4x + 11 = 0$; $x = \dfrac{11}{4}$. Таким образом, $M\left(\dfrac{11}{4}; 0\right)$.

б) Используем задачу 1175.
Построим образ точки B относительно оси x: $B'(3; -1)$.
Теперь, исходя из предыдущего пункта, найдем уравнение прямой AB':



$$\begin{cases} 4 = -2k + b \\ -1 = 3k + b \end{cases} \begin{cases} 5k = -5 \\ b = 4 + 2k \end{cases} \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad y = -x + 2.$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-x+2 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Таким образом, $M(2;\ 0)$.

1263. **(1191)** **а)** Так как $B \neq 0$, то можно разделить все уравнение на B.

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Пусть $-\dfrac{A}{B}=k; -\dfrac{C}{B}-b$, тогда $y = kx + b$ – линейная функция, график – прямая, ч.т.д.

б) Так как $x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на x,

$y=x\ \dfrac{2}{x}$, а это не уравнение окружности, ч.т.д.

1264. **(1192)** Точка пересечения лежит на обеих окружностях, т.е. ее координаты удовлетворяют обоим уравнениям. Получаем:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

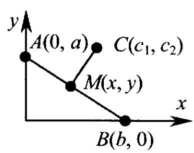
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - x^2 - y^2 = 3$ или $-2x - 4y + 2 = 0$.

Выражая отсюда x и подставляя его во второе уравнение, получаем: $5y^2 - 4y = 0$. Находим $y_1 = 0$ (тогда $x_1 = 1$) и

$y_2=\dfrac{4}{5}$ $(x_2=-\dfrac{3}{5})$.

Мы получили координаты двух точек пересечения окружностей. Общая хорда соединяет эти две точки. Найдем по формуле ее длину: $\sqrt{\left(-\dfrac{3}{5}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}-0\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

1265. **(1193)** Пусть константа равна k.



$\alpha AM^2 + \beta CM^2 + \gamma BM^2 = \alpha x^2 + \alpha(a-y)^2 +$
$+ \beta(c_1-x)^2 + \beta(c_2-y)^2 + \gamma(x-b)^2 + \gamma y^2 =$
$= x^2(\alpha+\beta+\gamma) - 2x(c_1\beta + \gamma b) + y_2(\alpha+\beta+$
$+\gamma) - 2y(\alpha a + \beta c_2) = k$.

а) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\left(x-\frac{c_1\beta+\gamma b}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha a+\beta c_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2-\frac{(c_1\beta+\gamma b)^2+(2a+\beta c_2)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\right)=k.$$

Таким образом, это может быть и окружность, и точка, и пустое множество.

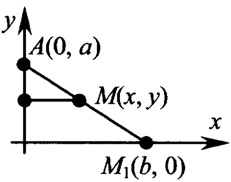
б) $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

$-2x(c_1\beta + \gamma b) - 2y(\alpha a + \beta c_2) = k$.

Это может быть прямая; плоскость или пустое множество.

1266. $AM \cdot AM_1 = k$.

(1194) Введем систему координат.



$$\sqrt{\left(x^2+(y-a)^2\right)\left(b^2+a^2\right)}=k;$$

$(x^2 + (y - a)^2)(b^2 + a^2) = k^2$.

$$x^2+(y-a)^2=\frac{k^2}{b^2+a^2}.$$

Таким образом, из уравнения видно, что это окружность без точки.

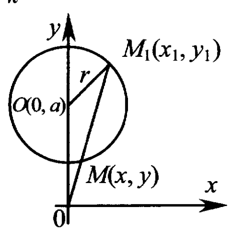
1267. $OM = k \cdot OM_1$.

(1195) $\frac{1}{k}=1+\frac{MM_1}{OM}$; $\frac{MM_1}{OM}=\frac{1-k}{k}=p$; $1+p=\frac{1}{k}$.

Введем систему координат.

Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению: $x^2 + (y_1 - a)^2 = r^2$.

Воспользуемся задачей № 1257 ($\lambda = p$).



$$x=\frac{x}{1+p};\ y=\frac{y_1}{1+p}.$$

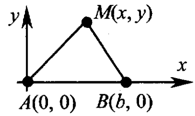
$x^2(1 + p)^2 + (y(1 + p) - a)^2 = r^2$;

$x^2 + (y - ak)^2 = k^2r^2$.

Из уравнения видно, что это окружность с центром $(0; ak)$ и радиусом kr.

1268. **а)** Введем систему координат.

(1196) $AM = \sqrt{x^2 + y^2}$; $BM = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$.



Так как $AM = k \cdot BM$, то

$x^2 + y^2 = k^2(x - b)^2 + y^2k^2$;

$x^2(1 - k^2) + 2xbk^2 + y^2(1 - k^2) = k^2b^2$.

$$\left(1-k^2\right)\left(\left(x+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 - \frac{b^2k^4}{\left(1-k^2\right)^2} + y^2\right) = k^2b^2;$$

$$\left(x+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2k^2}{\left(1-k^2\right)} + \frac{b^2k^4}{(1-k)^2};$$

$$\left(x+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2k^2}{\left(1-k^2\right)^2}\left(1-k^2+k^2\right) = \frac{b^2k^2}{\left(1-k^2\right)^2}.$$

Таким образом, это окружность с центром $\left(-\frac{bk^2}{1-k^2}; 0\right)$ и

$$r = \frac{kb}{1-k^2}.$$

б) Построим окружность, проходящую через точки A и B и с центром в точке $(x_1; y_1)$ и радиусом r.

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_1 - b)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \quad (x_1 - b)^2 - x_1^2 = 0; \begin{cases} x_1 = \frac{b}{2} \\ y_1 = \pm\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \end{cases}$$

Таким образом, уравнение окружности:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y \mp \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)^2 = r^2.$$

Если радиусы в точке пересечения окружностей пересекаются под прямым углом, то по теореме Пифагора:

$$\frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2}+r^2=\left(\frac{b}{2}+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2+r^2-\frac{b^2}{4};$$

$$\frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2}=\frac{b^2k^4}{(1-k^2)^2}+2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{bk^2}{1-k^2};\ \frac{b^2k^2-b^2k^4-b^2k^2(1-k^2)}{(1-k^2)^2}=0.$$

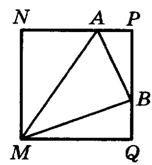
$0=0$ получили тождество.

Утверждение задачи доказано.

Задачи к главе XI

1269. По условию $AN=\frac{1}{2}NM$, $BQ=\frac{1}{3}MQ$. Тогда по теореме Пи-
(1197)

фагора для треугольников MNA и MBQ:



$$AM=\sqrt{MN^2+\frac{MN^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}MN,$$

$$BM=\sqrt{MQ^2+\frac{MN^2}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}MQ=\frac{\sqrt{10}}{2}MN.$$

Выразим $S_{\Delta AMB}$ через сторону квадрата MN.

$S_{\Delta AMB}=S_{MNPQ}-S_{\Delta APB}-S_{\Delta BQM}-S_{\Delta MNA}=$

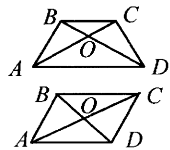
$=MN^2-\frac{1}{6}MN^2-\frac{1}{6}MN^2-\frac{1}{4}MN^2=\frac{5}{12}MN^2.$

А теперь найдем $S_{\Delta AMB}$ с помощью синуса $\angle AMB$ и приравняем результаты. $MN\frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot\sin\angle AMB=\frac{5}{12}\cdot MN$ и

$\sin\angle AMB=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Из условия $\angle AMB$ меньше 90°, значит,

$\angle AMB=45°$.

1270. (1198) Пусть $AO = x$; $BO = y$; $OC = x_2$; $OD = y_2$.



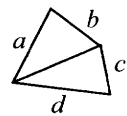
$S_1 = \frac{1}{2} x \cdot y \cdot \sin\alpha$; $S_2 = \frac{1}{2} x_2 \cdot y_2 \cdot \sin\alpha$;

$S_3 = \frac{1}{2} x_2 \cdot y \cdot \sin\alpha$; $S_4 = \frac{1}{2} x \cdot y_2 \cdot \sin\alpha$;

$xy \cdot x_2y_2 = xy - x_2y_2$.

Таким образом, $S_1 \cdot S_2 = S_3 - S_4$, а т.к. только для двух четырехугольников (трапеция и параллелограмм) выполняется то, что $S_1 = S_2$, то $S_1^2 = S_3S_4$; $S_1 = \sqrt{S_3S_4}$, утверждение доказано.

1271. (1199) Разобьем четырехугольник на два треугольника.



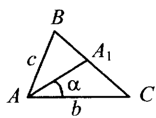
Так как $\sin\alpha < 1$, то

$$S = \frac{1}{2}\left(cd \cdot \sin \hat{cd} + ab \cdot \sin \hat{ab} \right) \le (cd + ab).$$

Докажем, что $cd + ab \le ac + bd$:

$(c - b)d \le (b - c)a$, то где $-d \le a$, верное неравенство, следовательно, $S \le \frac{1}{2}(cd + ab) \le \frac{1}{2}(ac + bd)$.

1272. (1200) $S_{ABC} = \frac{1}{2} cb \sin(2\alpha)$. Пусть $AA_1 = x$.

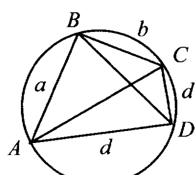


$S_{ABC} = S_{ABA_1} + S_{ACA_1} =$

$$= \frac{1}{2}(bx \cdot \sin\alpha + cx \cdot \sin\alpha) = \frac{1}{2} cb \cdot \sin 2\alpha;$$

$$(b + c)x \cdot \sin\alpha = 2cb \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha; \ x = \frac{2ab\cos\alpha}{b + c}.$$

1273. (1201) Т.к. $\hat{ab} + \hat{dc} = \hat{bc} + \hat{ad} = 180°$, то пусть $\hat{ab} = x$; $\hat{da} = y$. По теореме косинусов:



$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos x =$
$= c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - x)$;

$$(2cd + 2ab)\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{1};$$

$$\cos x = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2cd+2ab};$$

$$AC = \sqrt{a^2+b^2-2ab\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(cd+ab)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2cd+b^2cd+a^3b+b^3a-a^3b-b^3a+c^2ab+d^2ab}{cd+ab}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab}{cd+ab}}.$$

Аналогично: $a^2+d^2-2ab\cos y = c^2+b^2+2cb\cos y$;

$$\cos y = \frac{a^2+d^2-c^2-b^2}{2cb+2ab};$$

$$BD=\sqrt{a^2+d^2-2ab\frac{a^2+d^2-c^2-b^2}{2(cb-ad)}}=\sqrt{\frac{a^2bc+d^2bc+b^2ad+c^2ad}{ad+bc}}.$$

1274. См. рис. к №1273. Из задачи №1273:

(1202) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin x$;

$$\cos x = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2cd+2ab}; 1-\sin^2 x = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(cd+ab)}.$$

Так как $x \in (0;\pi)$, то $\sin x > 0$,

$$\sin x = \frac{\sqrt{4(cd+ab)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)}}{2cd+2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{(2cd+2ab+a^2+b^2-c^2-d^2)(2cd+2ab-a^2-b^2+c^2+d^2)}}{2cd+2ab} =$$

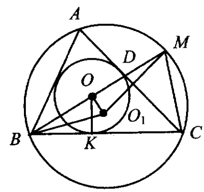
$$= \frac{\sqrt{((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2)}}{2cd+2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-c)(c+d+b-a)}}{2cd+2ab} =$$

$$=\frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{2(cd+ab)}=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{cd+ab}.$$

Таким образом,

$$S_{ABCD}=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{cd+ab}(ab+cd)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$



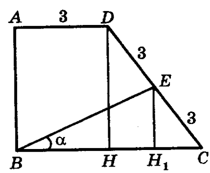
1275. Пусть в ΔABC BD – биссектриса, M -
(1203) точка ее пересечения с описанной окружностью, O и O_1 – соответственно центры вписанной и описанной окружностей. По условию $BC - AC = AC - AB$, откуда $AC = (AB + BC)/2$ (1). Тогда CO – биссектриса угла C; $\angle COM = \angle C/2 + \angle B/2$ как внешний угол в ΔBOC и $\angle OCM = \angle OCD + \angle DCM = \angle C/2 + \angle B/2$; следовательно, $\angle COM = \angle OCM$ и, значит, $CM = OM$ (2).

По свойству биссектрисы (№535):
$CD/AD = BC/AB$, $CD/[(AB + BC/2 - CD] = BC/AB$ $(AB + BC)(2CD - BC) = 0$, откуда $CD = BC/2$ (3). Если K – середина BC, то $\Delta CKO = \Delta CDO$, поскольку $CK = BC/2 = CD$, $\angle KCO = \angle OCD$, CO – общая сторона.

Отсюда $\angle OKC = \angle ODC$, следовательно, $\angle BKO = \angle CDM$, а так как $\angle DCM = \angle OBK = \angle B/2$ и $CD = BC/2 = BK$, то $\Delta BKO = \Delta CDM$. Тогда $CM = BO$ и из (2) $BO = OM$.

В ΔMO_1B: $O_1B = O_1M$ как радиусы, поэтому медиана O_1O является также и высотой, то есть $O_1O \perp BO$.

Если же дано, что $O_1O \perp BO$, то $BO = OM$; проводя рассуждения в обратном порядке, получим (3), а следовательно, и (1).



1276. Сделаем дополнительное построение:
(1204) проведем высоты DH и EH_1 к стороне BC. EH_1 – средняя линия треугольника DCH, значит, $EH_1 = \frac{1}{2}DH$, $HH_1 = H_1C$.

$H_1H = \dfrac{BC-3}{2}$, т.к. $BH = 3$. Получаем из ΔBEH_1: $EH_1 = \text{tg}\,\alpha \cdot BH_1 = \text{tg}\,\alpha\,(BH + H_1H) =$

$= \text{tg}\,\alpha \cdot \left(3 + \dfrac{BC-3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\,\text{tg}\,\alpha \cdot (BC+3)$. Тогда $DH = (BC+3)\cdot \text{tg}\,\alpha$.

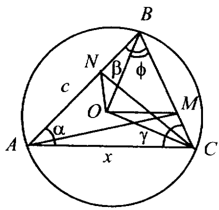
Применим теорему Пифагора для ΔDHC: $6^2 = DH^2 + (BC-3)^2$, т.к. $HC = 2HH_1 = BC - 3$. Получаем: $DH^2 + BC^2 - 6BC - 27 = 0$.

Подставим $DH = (BC+3)\cdot \text{tg}\,\alpha$ в полученное выражение и решим уравнение: $BC = 12 \cdot \cos^2\alpha - 3$, далее вычислим DH:
$DH = 12 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Теперь находим площадь трапеции:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}\cdot DH = \frac{12\cdot\cos^2\alpha - 3 + 3}{2}\cdot 12\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$$

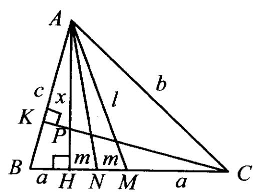
$= 72 \cdot \sin\alpha\,^{\circ}\!\cdot \cos^3\alpha$.

1277. Пусть $AC = x$, $AB = c$, $OB = OC = R$,
(1205) $\angle CAB = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle OBC = \phi$, $AM \perp BC$, $CN \perp AB$.



Тогда $S_{OMB} = 0{,}5OB \cdot BM \cdot \sin\phi =$
$= 0{,}5Rc \cdot \cos\beta \cdot \sin\phi$. Так как
$\phi = (180° - \angle BOC)/2 = (180° - 2\alpha)/2 =$
$= 90° - \alpha$, $x/\sin/3 = c/\sin\gamma = 2R$, $R =$
$= x/(2\sin\beta)$, $c = x\sin\gamma/\sin\beta$, то $S_{OMB} =$
$= x^2\cos\beta \cdot \sin\gamma\cos\alpha/(4\sin^2\beta)$.
Аналогично $S_{ONB} = x^2\cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \sin\alpha/(4\sin^2\beta)$.
Следовательно, $S = S_{OMB} + S_{ONB} = x^2\cos\beta \cdot \sin\gamma\cos\alpha/(4\sin^2\beta) +$
$+ x^2\cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \sin\alpha/(4\sin^2\beta)$. Но $\alpha + \gamma = 180° - \beta$, поэтому
$S = x^2\cos\beta \cdot \sin\beta\,(4\sin^2\beta) = 0{,}25 \cdot x^2\text{ctg}\,\beta$; $x = \sqrt{S\cdot \text{tg}\,\beta}$.

1278. Пусть $BM = MC = a$, $AC = b$,
(1206) $AB = c$, $HN = NM = m$.



Из ΔAHM:

$m = \dfrac{HM}{2} = \sqrt{(l^2 - h^2)}/2$ (1). По

свойству биссектрисы (№535):
$BN/NC = AB/AC$,
$(a-m)/(a+m) = c/b$ (2). Если P – точка пересечения высот AH и CK, $AP = x$, то ΔHPC подобен ΔHBA, откуда

$PH/BH = HC/AH$, $(h - x)/(a - 2m) = (a + 2m)/h$ (3).

Из ΔABH:

$AB^2 = AH^2 + BH^2$, $c^2 = h^2 + (a - 2m)^2$ (4), из ΔACH:

$AC^2 = AH^2 + CH^2$, $b^2 = h^2 + (a + 2m)^2$ (5).

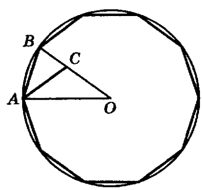
Из (2), (4) и (5): $(a+m)^2/(a-m)^2 = [ht + (a+2m)^2]\cdot[h^2+(a-2m)^2]$, следовательно, $(a + m)^2 = k[h^2 + (a + 2m)^2]$ и $(a - m)^2 = [h^2 + (a - 2m)^2]$; складывая и вычитая эти два равенства, получим:

$$\begin{cases} 2\left(a^2+m^2\right) = k\left(2h^2+2a^2+8m^2\right), \\ 4am = k\cdot 8am, \end{cases}$$

отсюда $k = 1/2$ и $a^2 = h^2 + 2m^2$. Из (3) тогда $h(h - x) = a^2 - 4m^2$, $h^2 - hx = (h^2 + 2m^2) - 4m^2$, $x = 2m^2/h$. Из (1) окончательно имеем, что $x = (l^2 - h^2)/(2h)$.

Задачи к главе XII

1279. **а)** Рассмотрим ΔAOB. $AO = OB = r$.
(1207) Значит, ΔAOB – равнобедренный.



$$\angle BOA = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ.$$

$$\angle OBA = \angle BAO = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

$\angle CAO = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$, т.к. AC – биссектриса $\angle A$). Значит,

$\Delta ABC \sim \Delta OAB$ (по двум углам).

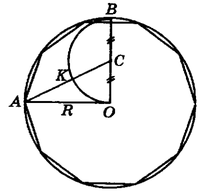
б) ΔABC – равнобедренный (т.к. $\Delta ABC \sim \Delta OAB$): $AB = AC$.

ΔACO – равнобедренный ($\angle CAO = \angle COA = 36^\circ$): $OC = AC$,

т.е. $AB = AC = OC = a$. Тогда $\dfrac{R}{a} = \dfrac{a}{R - a}$, откуда

$a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}R$. По смыслу подходит $a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}R$, ч.т.д.

1280. ΔAOC – прямоугольный: AO – катет $= R$,



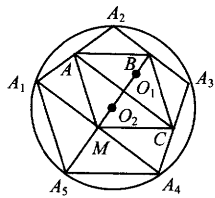
(1208) $OC = \frac{1}{2}R = \frac{R}{2}$,

$AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}R^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$,

$CK = \frac{R}{2}$ и $AK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$, т.е. AK равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность, что и требовалось доказать.

1281. Проведем биссектрису угла A_5, т.к.

(1209) она является и медианой и высотой, то она пройдет через точку O (центр исходной окружности) и совпадет с биссектрисой угла ABC (т.к. $A_1A_4 \parallel AC \parallel A_2A_3$, а биссектриса $\angle ABC$ является и медианой и высотой). Таким образом, $OO_1 \perp AC$. Осталось доказать, что $O_1H = HO$.



$\angle A_5 = 108°$; $\angle A_5A_1A_4 = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$;

$\angle A_2A_1A_4 = 72°$; $\angle AA_2B = 108°$; $\angle A_2AB = \angle A_2BA = \angle CBA_3 = 36°$. Таким образом, $\angle ABC = 108°$ и $\angle BAC = 36°$.

В $\Delta A_1A_2A_4$ AM – средняя линия и равна $\frac{1}{2}A_2A_4 = \frac{1}{2}A_1A_4 = A_1M$,

т.е. ΔA_1MA – равнобедренный, таким образом, $\angle A_1AM = 72°$, $\angle CAM = 180° - 72° - 36° - 36° = 36°$, следовательно, $\Delta ABC = \Delta AMC$, а точка О является центром вписанной окружности для ΔAMC, т.к. лежит на пересечении биссектрис, таким образом, $O_1H = HO$. Утверждение доказано.

1282. Построим два взаимно перпендикулярных радиуса OA и OB

(1210) данной окружности, где точка O – ее центр. Построим окружность с центром в точке C и радиусом $\frac{1}{2}OB$, где C – середина OB. Пусть точка K – точка пересечения построенной окружности с отрезком CA. Отрезок AK – сторона правильного пятиугольника.

Доказательство см. задачи 1280 (1208) и 1279 (1207).

1283. См. задачу № 1282.

(1211) Сначала построить 10-угольник, затем соединить A_1 с A_3; A_3 с A_5; A_5 с A_7; A_7 с A_9; A_9 с A_1.

Полученная фигура – искомая.

1284. См. задачу № 1283.

(1212) Сначала построить 5-угольник, затем соединить A_3 с A_5; A_3 с A_1; A_4 с A_1; A_4 с A_2; A_5 с A_2.

Полученная фигура – искомая.

1285. Если соединить точку M с вершинами данного правильного

(1213) n-уголь-ника, то мы получим n треугольников с общей вершиной M, а основанием треугольника будет являться сторона многоугольника.

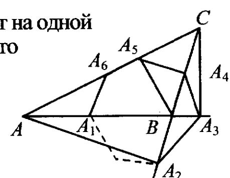
Допустим, a – сторона многоугольника, h_1 – перпендикуляр из точки M к прямой a. Тогда $S = \dfrac{a \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + ...h_n)}{2}$.

Но площадь многоугольника можно выразить через радиус вписанной окружности, т.е. $S = \dfrac{n \cdot a \cdot r}{2}$, тогда

$\dfrac{a \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + ..h_n)}{2} = \dfrac{n \cdot a \cdot r}{2}$ или $h_1 + h_2 + h_3 + ... + h_n = nr$, ч.т.д.

1286. Исходя из задачи 895, точки $A_1, ..., A_6$ лежат на одной

(1214) окружности, и, таким образом, докажем, что отрезки $A_1A_2, ..., A_6A_1$ равны.



Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 4\alpha$.

Т.к. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то $\alpha = 180°/7$. Пусть $AB = x$, тогда:

$A_4A_5 = \dfrac{x}{2}$ (средняя линия треугольника).

$A_1A_6 = \dfrac{x}{2}$ (медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная к гипотенузе, равна ее половине).

A_3A_2: По теореме синусов:

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin 2\alpha};\ BC=2x\cos\alpha\ ;$$

$$\frac{AC}{\sin 4\alpha}=\frac{x}{\sin\alpha};\ AC=\frac{x\sin 4\alpha}{\sin\alpha}=x\left(3-4\sin^2\alpha\right)=4x\cos 2\alpha x\cos\alpha\ .$$

Т.к. $\cos\angle B=\cos 4\alpha=\dfrac{BA_3}{AB}=\dfrac{BA_2}{BC}$, то $\Delta A_2BA_3 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle B$, таким образом,

$$\frac{A_2A_3}{AC}=\left|\cos 4\alpha\right|=-\cos 4\alpha\ ;$$

$$A_1A_3=-4x\cos 4\alpha\cdot\cos 2\alpha\cos\alpha=\frac{x\sin\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{x}{2}\ .$$

A_6A_5:

$A_6C=BC\cos\alpha=2x\cdot\cos^2\alpha$;

$$A_5A_6=2x\cos 2\alpha-\frac{x}{2}(3-4\sin 2\alpha)=2x\cos 2\alpha-\frac{x}{2}(4\cos 2\alpha-1)=\frac{x}{2}\ .$$

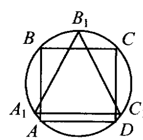
A_3A_4:

Т.к. $\angle CAB=\angle A_2A_3B$ (из доказанного выше), то $\angle A_2A_3A_4=180°-2\alpha=5\cdot 180°/7$, а это как раз и есть угол правильного семиугольника, таким образом, $A_3A_4=\dfrac{x}{2}$.

$A_1A_2\neq\dfrac{x}{2}$, т.к. $\angle ABC\neq\dfrac{x}{2}$, таким образом, точка A_1 – искомая седьмая вершина.

1287. Пусть R – радиус окружности.

(1215) Тогда $AB=R\sqrt{2}$; $A_1B_1=\sqrt{3}\,R$.



Длина полуокружности равна $L=3{,}14R$.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\cup 3{,}14R;\ 5+2\sqrt{6}\cup 9{,}9;\ \sqrt{6}\cup 2{,}46;\ 6=6$.

Итого: $R\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\approx\pi R+0{,}1R$.

1288. $AO=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R;\ AB=\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}R$;

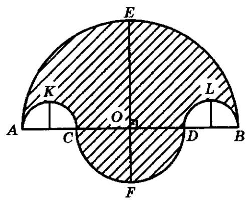
(1216)

$$AC=\sqrt{36R^2+\frac{7+4\sqrt{3}}{4}R^2}=\frac{1}{2}R\sqrt{151+4\sqrt{3}}\ ;$$

$$\frac{1}{2}R\sqrt{151+4\sqrt{3}}\cup(2\pi+0{,}001)R;\ 151+4\sqrt{3}\cup158{,}005;\ \sqrt{3}\cup1{,}75;\ 3=3.$$

Таким образом, $\frac{1}{2}R\sqrt{151+4\sqrt{3}}=(2\pi+0{,}001)R$.

1289. S – площадь заштрихованной
(1217) фигуры. Запишем ее:



$$S=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot OA^2+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot OC^2-$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot AC^2,\text{ где } AC=OA-OC.$$

Тогда получаем:

$$S=\frac{1}{4}\pi\,(OA^2+OC^2+2OA\cdot OC)=\frac{1}{4}\pi\,(OA+OC)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\pi\,(OE+OF)^2=\frac{1}{4}\pi\,EF^2,\text{ ч.т.д.}$$

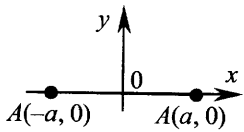
1290. **а)** R – радиус внешней окружности; r – радиус внутренней
(1218) окружности. Сначала построим прямоугольный треугольник, где R – гипотенуза, r – один из катетов. Затем опишем окружность около треугольника, радиусом, равным второму катету. Это и будет искомая окружность, т.к. площадь ограниченного ею круга: $\pi\,(R^2-r^2)=\pi R^2-\pi r^2$, что равно площади данного кольца.

б) r – радиус данного полукруга. Построим квадрат со стороной r. Проведем диагонали. Точка пересечения диагоналей – центр искомой окружности радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}r$ (т.к. площадь ограниченного ею круга в 2 раза меньше площадь круга радиуса r).

в) r – радиус данного сектора. Построим равносторонний треугольник со стороной r. Около него опишем окружность радиуса $r_1=\frac{1}{\sqrt{3}}r$, затем строим отрезок $r_2=\frac{1}{\sqrt{2}}r_1$. Окружность радиуса $r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} r_1$ – искомая, т.к. площадь ограниченного ею круга в 6 раз меньше площади круга радиуса r.

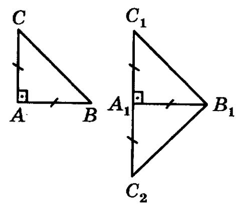
Задачи к главе XIII

1291. Введем систему координат.
(1219) При центральной симметрии:



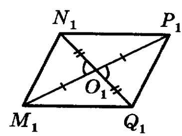
$B \to O - OB = 0 - a = -a = A$;
$A \to O + OA = 0 + a = B$.
При осевой симметрии относительно середины AB аналогично.
$B \to O - OB = 0 - a = -a = A$; $A \to O + OA = 0 + a = a = B$.

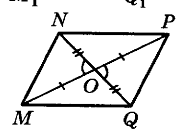
1292. Для доказательства построим прямоугольные треугольники ABC и
(1220) $A_1B_1C_1$, где $\angle A = \angle A_1 = 90°$; $AB = BC = A_1B_1 = A_1C_1$. Проведем $C_1C_2 \perp A_1B_1$ и $A_1C_1 = A_1C_2$. При движении угол отображается на равный ему угол, поэтому точка C отобразится в точку C_1 или C_2.



Движение, при котором точки A, B и C отображаются, соответственно, в точки A_1, B_1 и C_1, существует только одно. Аналогично, только одно движение существует, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1 и C_2. Значит, есть два и только два движения, при которых точки A и B отображаются, соответственно в точки A_1 и B_1, что и требовалось доказать.

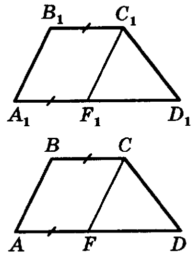
1293. Рассмотрим данные параллелограммы
(1221) $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$. Диагонали MP и M_1P_1, NQ и N_1Q_1 в точке пересечения делятся пополам. $\Delta MNO = \Delta M_1N_1O_1$ (по первому признаку равенства треугольников). Значит, существует такое движение, при котором точки M, N и O отображаются в точки M_1, N_1 и O_1. Таким образом,





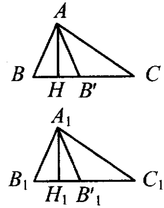
прямая MO отображается на прямую M_1O_1; MN – на прямую M_1N_1 и значит, вершина P – на вершину P_1 и Q – на Q_1. При рассматриваемом движении параллелограмм $MNPQ$ отображается на параллелограмм $M_1N_1P_1Q_1$. Но любое движение является наложением. Значит, параллелограммы $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ можно совместить наложением, т.е. они равны, что и требовалось доказать.

1294. (1222) По условию $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – данные трапеции. AD и A_1D_1 – бóльшие основания. Отложим на них отрезки, равные другому основанию, т.е. $AF = BC$ и $A_1F_1 = B_1C_1$. Четырехугольники $ABCF$ и $A_1B_1C_1F_1$ являются параллелограммами (т.к. стороны равны и параллельны). Значит, $CF = AB$ и $C_1F_1 = A_1B_1$. Рассмотрим ΔCFD и



$\Delta C_1F_1D_1$. Они равны по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому существует такое движение, при котором точки F, C, D отображаются в точках F_1, C_1 и D_1. Параллелограмм $ABCF$ на параллелограмм $A_1B_1C_1F_1$ отображается и вершина B на вершину B_1. Значит, при рассматриваемом движении трапеция $ABCD$ отображается на трапецию $A_1B_1C_1D_1$, т.е. их можно совместить наложением. Отсюда $ABCD = A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось доказать.

1295. (1223) $BA = B_1A_1$; $AC = A_1C_1$;
$\angle B - \angle C = \angle B_1 - \angle C_1$.
Отобразим точку B относительно высоты AH (B_1 относительно A_1H_1);
$AB' = AB = A_1B_1 = A_1B'_1$;
$\angle B = \angle AB'B = \angle B'AC + \angle C$ (т.к. внешний угол треугольника равен сумме двух других).



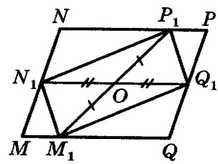
Аналогично $\angle B_1 = \angle A_1B'_1B_1 = \angle B'_1A_1C_1 + \angle C_1$.

Таким образом, $\angle B'AC = \angle B'_1A_1C_1$.

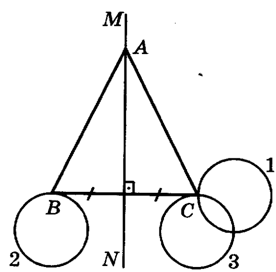
Таким образом, $\Delta AB'C = \Delta A_1B'_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними).

Таким образом, $\angle AB'C = \angle A_1B'_1C_1$ и $\angle AB'B = \angle A_1B'_1B_1$. Следовательно, $\Delta BAB' = \Delta B_1A_1B'_1$ (т.к. $\Delta ABH = \Delta ABH' = \Delta A_1H_1B'_1 = \Delta A_1B_1H_1$ по гипотенузе и острому углу). Таким образом, исходные треугольники состоят из двух равных треугольников, а значит они равны.

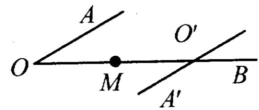
1296. **(1224)** Пусть $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ – данные параллелограммы, причем вершины M_1, N_1, P_1 и Q_1 лежат на сторонах параллелограмма $MNPQ$. Диагонали M_1P_1 и N_1Q_1 пересекаются в точке O. Тогда O – центр симметрии. Точка M_1 отображается в точку P_1, точка N_1 – в точку Q_1. Значит, прямая MQ отображается на прямую, проходящую через точку P_1 и параллельную MQ, т.е. на прямую NP. Также прямая MN отображается на прямую PQ. Точка M отображается в точку пересечения прямых NP и PQ (точка P). Таким образом, точка O – середина диагонали MP, а значит, середина диагоналей $MNPQ$. Отсюда: точки пересечения диагоналей $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ совпадают, ч.т.д.



1297. **(1225)** MN – данная прямая. 1 и 2 – данные окружности. Построим окружность 3, симметричную окружности 2 относительно прямой MN. C – одна из точек пересечения данной окружности с построенной. Построим точку B, симметричную точке C относительно прямой MN (она будет лежать на 2 окружности). Далее, отметим точку A на прямой MN. Она будет находиться на расстоянии CB от точки C. Получаем правильный треугольник ABC, который и будет искомым.

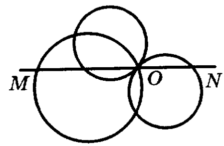


1298. (1226) Построим прямую $O'A'$ симметричную прямой OA относительно точки M. Она пересечет прямую OB в точке O' такой, что $O'M = OM$.



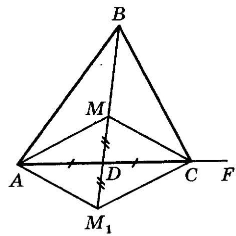
$O'M$ – искомый отрезок.

1299. (1227) Точка O – точка пересечения данных окружностей. Построим окружность, симметричную одной из данных, относительно точки O. Эта окружность пересекается с другой данной окружностью в точке M.



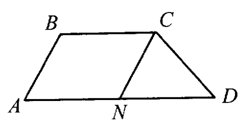
Точка N симметрична точке M относительно точки O. Получаем отрезок MN, концы которого лежат соответственно на данных окружностях, а его середина совпадает с одной из точек пересечения данных окружностей, ч.т.д.

1300. (1228) Даны три медианы. Построим ΔAMM_1, каждая из сторон которого равна $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы. Через точку D ($MD = DM_1$) проведем прямую AF. Отложим отрезок $DC = AD$. Аналогично, через точку D проведем прямую M_1B, где $BM = MM_1$. D – середина AC, BD – медиана ΔABC.



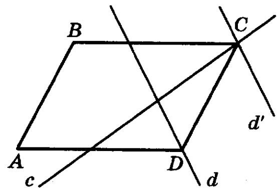
$BM = \frac{2}{3}MM_1$. $AM = \frac{2}{3}$ одной из данных медиан. В ΔABC она является медианой. $AMCM_1$ – параллелограмм, т.к. его диагонали AC и MM_1 делятся в точке пересечения пополам. Значит, $MC = AM_1$, т.е. медиана ΔABC, проведенная из вершины угла C, равна третьей из данных медиан. Следовательно, ΔABC – искомый.

1301. (1229) Построим $AMCD$ по трем сторонам ($MC = AB$), затем продлим MD на

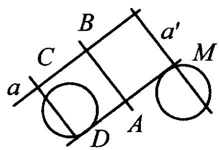


вектор $\overrightarrow{CB}$. Получим точку A. Затем, построив окружность с радиусом AB из точки A и с радиусом BC из точки C, отметим точку B (точка их пересечения находится в верхней полуплоскости от прямой AC). $ABCD$ – искомая трапеция.

1302. (1230) Построим прямую d' путем параллельного переноса прямой d на вектор $\overrightarrow{AB}$. Получаем точку C. Точка D принадлежит прямой d, при параллельном переносе отобразилась в точку C. Таким образом, $ABCD$ – искомый параллелограмм.



1303. (1231) Отобразим прямую $a \to a'$ путем поворота вокруг точки A на 90°. Затем путем симметрии отобразим окружность относительно точки A. Найдем точку пересечения M новой окружности с прямой a'. Затем путем поворота точки M вокруг точки A на 90° (в обратную сторону) мы получим точку B на прямой a. После точку M путем центральной симметрии отобразим на исходную окружность. Получим точку B. Затем отложим от точки B вектор $\overrightarrow{AD}$, таким образом, $B \to C$.
$ABCD$ – искомый квадрат.



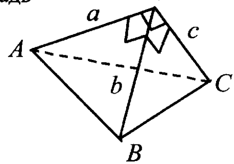
Задачи к главе XIV

1304. (1232) Пусть $OA = a$; $OC = c$; $OB = b$. Площадь трех верхних граней равна:

$$\frac{1}{2}(cb + ba + ac),$$ а сумма

квадратов этих площадей:

$$\frac{1}{4}(c^2b^2 + b^2a^2 + a^2c^2).$$



$AC^2 = a^2 + c^2$; $AB^2 = a^2 + b^2$; $CB^2 = c^2 + b^2$.

По теореме косинусов:

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + b^2 - 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}\ \cos\angle ABC;$$

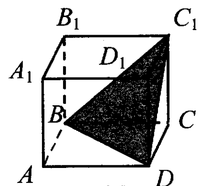
$$\cos\angle ABC = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}}.$$

$$S = \frac{1}{4}AB^2 \cdot BC^2 \cdot \sin^2\angle ABC = \frac{1}{4}(a^2+b^2)(c^2+b^2)\left(1-\frac{b^4}{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}\right) =$$

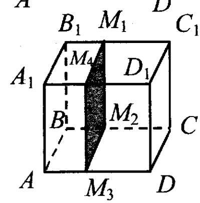
$$= ((a^2+b^2)(c^2+b^2)-b^4)\frac{1}{4} = (a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+b^4-b^4)\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2),$$ что и требовалось доказать.

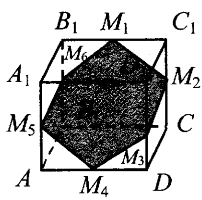
1305. (1233) 1) Пусть сторона куба равна a, тогда $DC_1 = a\sqrt{2} = BD = BC$ (по теореме Пифагора). Таким образом, BC_1D – правильный треугольник.



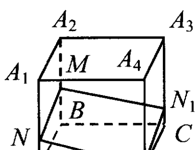
2) $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \parallel AA_1$;
$M_1M_2 = M_3M_4 = AA_1$;
$M_1M_4 \parallel M_2M_3 \parallel AB$;
$M_1M_4 = M_2M_3 = AB$.
Таким образом, сечение $M_1M_2M_3M_4$ – квадрат.



3) Проводим сечение плоскостью $M_1M_2M_5$, где
$B_1M_1 = M_1C_1 = C_1M_2 = AM_5$.
Таким образом,
$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5 =$
$= M_5M_6$ и это получается правильный шестиугольник.



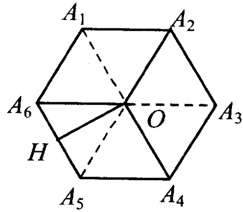
1306. (1234) Пусть паук сидит в точке M (на ребре BB_1), а муха в точке D.
Если развернуть боковую поверхность куба, то кратчайшее расстояние



от точки M до точки D будет, очевидно, прямая, которая пересекает ребро AA_1 в точке N такой, что $AN = \frac{1}{2}BM$.

Таким образом, паук должен идти по прямой до точки N (или N_1), а затем по прямой до точки D.

1307. **(1235)** Спроецируем куб на плоскость так, чтобы диагональ его была перпендикулярна этой плоскости: $A_3A_6 = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3}$. Таким образом, сторона шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и



$OH = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{16}a^2} = \frac{3}{4}a$. Таким образом, радиус вписанной окружности равен $\frac{3}{4}a$, т.е. в нее можно вписать квадрат стороной $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$, что явно больше a.

Ч.т.д.

1308. **(1236)** Пусть $AC = a, A_1A = h$.

$V_1 = V_{MNCC_1DB_1B}, V_2 = V_{A_1B_1C_1MN} = V_{ABCMN}, V_3 = V_{AA_1MN}$.

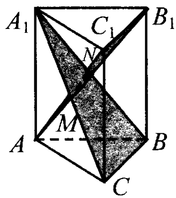
Так как все грани составляющие эти фигуры равны между собой:

$$V = \frac{1}{2}a \cdot a\sin 60^\circ \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h; V_1 + V_2 = \frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot ah = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2h = \frac{2}{3}V;$$

$$V_2 + V_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h.$$

Таким образом, $V_1 - V_3 = \frac{1}{3}V$.

Разобьем V_1 на 3 фигуры плоскостями, перпендикулярными основанию и проходящими через точку P_1 (середина HP_2) и P_4 (середина P_3H). Получится две четырех угольных пирамиды (одинакового объема) и треугольная призма.



$NP_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$; $MN = \frac{1}{2}a$ (средние линии);

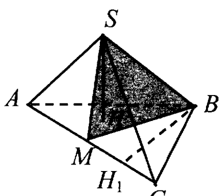
$$NP_1 = NP_2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\cdot h\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{48}a^2h = \frac{1}{12}V;$$

$$V_{\text{призмы}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}NP_1\cdot AA_1 = \frac{a}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}ah = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2h = \frac{1}{4}V;$$

$$V_1 = 2\frac{1}{12}V + \frac{1}{4}V = \frac{5}{12}V; V_3 = -\frac{1}{3}V + \frac{5}{12}V = \frac{1}{12}V; V_2 = \frac{1}{3}V - \frac{1}{12}V = \frac{1}{4}V.$$

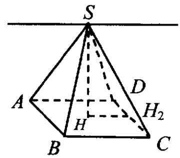
1309.



$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot AM\cdot BH_1\cdot\frac{1}{2}\cdot SH = \frac{1}{6}AM\cdot BH_1\cdot SH_2 = \frac{1}{6}MC\cdot BH_1\cdot SH = V_2,$$

где V_1 – объем $ABMS$; V_2 – объем $MBCS$, таким образом, $V_1 = V_2$, ч.т.д.

1310. Объем будет равен объему цилиндра высотой a и радиусом SH без двух конусов высотой $a/2$ и радиусом SH.



$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2SH_2};\ SH_2=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};\ HH_2=\frac{a}{2}.$$

Таким образом $SH=\sqrt{\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1}$;

$$V_ц=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\frac{a^2}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)\cdot a=\frac{\pi a^3}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right);$$

$$2V_к=\frac{2}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{2}{3}\pi\frac{a^2}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{12}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right);$$

$$V_ц-2V_к=\frac{\pi a^3}{6}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right).$$